

Ovaj problem se može tretirati na nekoliko načina. Jedan od njih je sljedeći. Uvedimo sljedeće predikate:

$P(x)$  –  $x$  je političar

$Q(x)$  –  $x$  je dobar političar

$R(x)$  –  $x$  je građanin

$S(x)$  –  $x$  je direktor javne ustanove

$T(x, y)$  –  $x$  voli  $y$ .

Hipoteza “Neki građani vole sve dobre političare” može se zapisati kao

$$\exists x (R(x) \wedge \forall y (Q(y) \Rightarrow T(x, y)))$$

Hipoteza “Svi direktori javnih ustanova su političari” može se zapisati kao

$$\forall x (S(x) \Rightarrow P(x))$$

Hipoteza “Niti jedan građanin ne voli direktore javnih ustanova” može se zapisati kao

$$\forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y)))$$

Imamo i skrivenu (implicitnu) hipotezu “Svaki dobar političar je političar” koja nije eksplicitno data u tekstu, ali je neophodna da uspostavi vezu između pojmova “političar” i “dobar političar” koji očito nisu neovisno, odnosno predikata  $P(x)$  i  $Q(x)$ :

$$\forall x (Q(x) \Rightarrow P(x))$$

Zaključak “Niti jedan direktor javnih ustanova nije dobar političar” može se zapisati kao

$$\forall x (S(x) \Rightarrow \neg Q(x))$$

Stoga, čitavo rezonovanje možemo zapisati ovako:

$$\begin{aligned} & \exists x (R(x) \wedge \forall y (Q(y) \Rightarrow T(x, y))), \forall x (S(x) \Rightarrow P(x)), \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y))), \\ & \forall x (Q(x) \Rightarrow P(x)) \not\models \forall x (S(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \end{aligned}$$

Drugim riječima, sljedeći izraz mora biti valjan:

$$\begin{aligned} & \exists x (R(x) \wedge \forall y (Q(y) \Rightarrow T(x, y))) \wedge \forall x (S(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y))) \wedge \\ & \wedge \forall x (Q(x) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \forall x (S(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \end{aligned}$$

Ovaj izraz je valjan ako i samo ako je kontradiktorna njegova negacija koja glasi

$$\begin{aligned} & \exists x (R(x) \wedge \forall y (Q(y) \Rightarrow T(x, y))) \wedge \forall x (S(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y))) \wedge \\ & \wedge \forall x (Q(x) \Rightarrow P(x)) \wedge \neg \forall x (S(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \end{aligned}$$

Ovaj izraz ima oblik  $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 \wedge F_5$ . Svedimo svaku od klauza  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  i  $F_5$  na preneks normalnu formu, uz dodatno oslobađanje od implikacija:

$$\begin{aligned} F_1 &= \exists x (R(x) \wedge \forall y (Q(y) \Rightarrow T(x, y))) = \exists x (R(x) \wedge \forall y (\neg Q(y) \vee T(x, y))) = \\ &= \exists x \forall y (R(x) \wedge (\neg Q(y) \vee T(x, y))) \end{aligned}$$

$$F_2 = \forall x (S(x) \Rightarrow P(x)) = \forall x (\neg S(x) \vee P(x))$$

$$F_3 = \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y))) = \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (\neg S(y) \vee \neg T(x, y))) = \\ = \forall x (\neg R(x) \vee \forall y (\neg S(y) \vee \neg T(x, y))) = \forall x \forall y (\neg R(x) \vee \neg S(y) \vee \neg T(x, y))$$

$$F_4 = \forall x (Q(x) \Rightarrow P(x)) = \forall x (\neg Q(x) \vee P(x))$$

$$F_5 = \neg \forall x (S(x) \Rightarrow \neg Q(x)) = \neg \forall x (\neg S(x) \vee \neg Q(x)) = \exists x \neg (\neg S(x) \vee \neg Q(x)) = \exists x (S(x) \wedge Q(x))$$

Potražimo sada odbijenicu za skup klauza  $F_1 - F_5$ :

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| (1) $\exists x \forall y (R(x) \wedge (\neg Q(y) \vee T(x, y)))$       | ( $F_1$ )                         |
| (2) $\forall y (R(a) \wedge (\neg Q(y) \vee T(a, y)))$                 | (EI iz (1) uz $x \rightarrow a$ ) |
| (3) $\forall x \forall y (\neg R(x) \vee \neg S(y) \vee \neg T(x, y))$ | ( $F_3$ )                         |
| (4) $\forall y (\neg R(a) \vee \neg S(y) \vee \neg T(a, y))$           | (UI iz (3) uz $x \rightarrow a$ ) |
| (5) $\exists x (S(x) \wedge Q(x))$                                     | ( $F_5$ )                         |
| (6) $S(b) \wedge Q(b)$   | (EI iz (5) uz $x \rightarrow b$ ) |
| (7) $\neg R(a) \vee \neg S(b) \vee \neg T(a, b)$                       | (UI iz (4) uz $y \rightarrow b$ ) |
| (8) $S(b)$   | (logička posljedica (6))          |
| (9) $\neg R(a) \vee \neg T(a, b)$                                      | (rezolucija iz (7) i (8))         |
| (10) $R(a) \wedge (\neg Q(b) \vee T(a, b))$                            | (UI iz (2) uz $y \rightarrow b$ ) |
| (11) $R(a)$  | (logička posljedica (10))         |
| (12) $\neg T(a, b)$  | (rezolucija iz (9) i (11))        |
| (13) $\neg Q(b) \vee T(a, b)$  | (logička posljedica (10))         |
| (14) $\neg Q(b)$   | (rezolucija iz (12) i (13))       |
| (15) $Q(b)$  | (logička posljedica (6))          |

(14) i (15) su međusobno kontradiktorni, te formiraju traženu odbijenicu (zapravo, međusobno su kontradiktorni već izrazi (6), (7) i (10), samo što se to ne vidi odmah). Interesantno je da  $F_2$  i  $F_4$  uopće nisu korišteni u dokazu, što znači da bi isti zaključak slijedio čak i ako se izbace druga i četvrta (skrivena hipoteza), odnosno čak i bez pretpostavke da su svi direktori javnih ustanova političari.

Drugi pristup ovom problemu je da se uvedu sljedeći predikati:

- $P(x)$  –  $x$  je dobar  
 $Q(x)$  –  $x$  je političar  
 $R(x)$  –  $x$  je građanin  
 $S(x)$  –  $x$  je direktor javne ustanove  
 $T(x, y)$  –  $x$  voli  $y$ .

Uz ovako uvedene predikate, hipoteza “Neki građani vole sve dobre političare” može se zapisati kao

$$\exists x (R(x) \wedge \forall y (P(y) \wedge Q(y) \Rightarrow T(x, y)))$$

Hipoteza “Svi direktori javnih ustanova su političari” može se zapisati kao

$$\forall x (S(x) \Rightarrow Q(x))$$

Hipoteza “Niti jedan građanin ne voli direktore javnih ustanova” može se zapisati kao

$$\forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y)))$$

Zaključak “Niti jedan direktor javnih ustanova nije dobar političar” može se zapisati kao

$$\forall x (S(x) \Rightarrow \neg (P(x) \wedge Q(x)))$$

Uz ovako usvojene predikate nisu potrebne nikakve skrivene hipoteze. Stoga, čitavo rezonovanje možemo zapisati ovako:

$$\begin{aligned} & \exists x (R(x) \wedge \forall y (P(y) \wedge Q(y) \Rightarrow T(x, y))), \forall x (S(x) \Rightarrow Q(x)), \\ & \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y))) \not\vdash \forall x (S(x) \Rightarrow \neg (P(x) \wedge Q(x))) \end{aligned}$$

Drugim riječima, sljedeći izraz mora biti valjan:

$$\begin{aligned} & \exists x (R(x) \wedge \forall y (P(y) \wedge Q(y) \Rightarrow T(x, y))) \wedge \forall x (S(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \\ & \wedge \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y))) \Rightarrow \forall x (S(x) \Rightarrow \neg (P(x) \wedge Q(x))) \end{aligned}$$

Ovaj izraz je valjan ako i samo ako je kontradiktorna njegova negacija koja glasi

$$\begin{aligned} & \exists x (R(x) \wedge \forall y (P(y) \wedge Q(y) \Rightarrow T(x, y))) \wedge \forall x (S(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \\ & \wedge \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y))) \wedge \neg \forall x (S(x) \Rightarrow \neg (P(x) \wedge Q(x))) \end{aligned}$$

Ovaj izraz ima oblik  $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 \wedge F_5$ . Svedimo svaku od klauza  $F_1, F_2, F_3$  i  $F_4$  na preneks normalnu formu, uz dodatno oslobađanje od implikacija:

$$\begin{aligned} F_1 &= \exists x (R(x) \wedge \forall y (P(y) \wedge Q(y) \Rightarrow T(x, y))) = \exists x (R(x) \wedge \forall y (\neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee T(x, y))) = \\ &= \exists x \forall y (R(x) \wedge (\neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee T(x, y))) \end{aligned}$$

$$F_2 = \forall x (S(x) \Rightarrow Q(x)) = \forall x (\neg S(x) \vee Q(x))$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (S(y) \Rightarrow \neg T(x, y))) = \forall x (R(x) \Rightarrow \forall y (\neg S(y) \vee \neg T(x, y))) = \\ &= \forall x (\neg R(x) \vee \forall y (\neg S(y) \vee \neg T(x, y))) = \forall x \forall y (\neg R(x) \vee \neg S(y) \vee \neg T(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4 &= \neg \forall x (S(x) \Rightarrow \neg (P(x) \wedge Q(x))) = \neg \forall x (\neg S(x) \vee \neg (P(x) \wedge Q(x))) = \\ &= \exists x \neg (\neg S(x) \vee \neg (P(x) \wedge Q(x))) = \exists x (S(x) \wedge P(x) \wedge Q(x)) \end{aligned}$$

Potražimo sada odbijenicu za skup klauza  $F_1 - F_4$ :

- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| (1) $\exists x \forall y (R(x) \wedge (\neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee T(x, y)))$ | ( $F_1$ )                         |
| (2) $\forall y (R(a) \wedge (\neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee T(a, y)))$           | (EI iz (1) uz $x \rightarrow a$ ) |
| (3) $\forall x \forall y (\neg R(x) \vee \neg S(y) \vee \neg T(x, y))$          | ( $F_3$ )                         |
| (4) $\forall y (\neg R(a) \vee \neg S(y) \vee \neg T(a, y))$                    | (UI iz (3) uz $x \rightarrow a$ ) |
| (5) $\exists x (S(x) \wedge P(x) \wedge Q(x))$                                  | ( $F_4$ )                         |
| (6) $S(b) \wedge P(b) \wedge Q(b)$  | (EI iz (5) uz $x \rightarrow b$ ) |
| (7) $\neg R(a) \vee \neg S(b) \vee \neg T(a, b)$                                | (UI iz (4) uz $y \rightarrow b$ ) |
| (8) $S(b)$  | (logička posljedica (6))          |
| (9) $\neg R(a) \vee \neg T(a, b)$   | (rezolucija iz (7) i (8))         |
| (10) $R(a) \wedge (\neg P(b) \vee \neg Q(b) \vee T(a, b))$                      | (UI iz (2) uz $y \rightarrow b$ ) |
| (11) $R(a)$   | (logička posljedica (10))         |
| (12) $\neg T(a, b)$   | (rezolucija iz (9) i (11))        |
| (13) $\neg P(b) \vee \neg Q(b) \vee T(a, b)$                                    | (logička posljedica (10))         |
| (14) $\neg P(b) \vee \neg Q(b)$   | (rezolucija iz (12) i (13))       |
| (15) $P(b) \wedge Q(b)$   | (logička posljedica (6))          |

Stavke (14) i (15) su međusobno kontradiktorne, jer je jedna negacija druge. Da to nismo uočili, mogli smo nastaviti recimo ovako:

- |                  |                             |
|------------------|-----------------------------|
| (16) $P(b)$      | (logička posljedica (15))   |
| (17) $Q(b)$      | (logička posljedica (15))   |
| (18) $\neg Q(b)$ | (rezolucija iz (14) i (16)) |

(17) i (18) su sada očigledno kontradiktorni. Zapravo, i ovdje su međusobno kontradiktorni već izrazi (6), (7) i (10), samo što to nije lako uočiti.