a) U ovom dijelu zadatka nema ništa što bi trebalo posebno naglasiti:

$$\neg(\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, \exists z\, Q(y,z)) = \neg(\neg\forall x\, P(x) \vee \exists y\, \exists z\, Q(y,z)) = \forall x\, P(x) \vee \neg\exists y\, \exists z\, Q(y,z) =$$
$$= \forall x\, P(x) \vee \forall y\, \forall z\, \neg Q(y,z) = \forall x \forall y \forall z\, (P(x) \wedge \neg Q(y,z))$$

b) Ovdje će biti prikazano jedno od više mogućih rješenja, ali je karakteristično da ne postoji niti jedno rješenje u kojem se javlja manje od 5 promjenljivih:

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,y,z) \wedge (\exists z\, Q(x,z) \Rightarrow \exists z\, Q(y,z))) =$$
$$= \forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,y,z) \wedge (\neg\exists z\, Q(x,z) \vee \exists z\, Q(y,z))) =$$
$$= \forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,y,z) \wedge (\forall z\, \neg Q(x,z) \vee \exists z\, Q(y,z))) =$$
$$= \forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,y,z) \wedge (\forall u \neg Q(x,u) \vee \exists z\, Q(y,z))) =$$
$$= \forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,y,z) \wedge \forall u\, (\neg Q(x,u) \vee \exists z\, Q(y,z))) =$$
$$= \forall x\, \forall y\, (\exists z\, P(x,y,z) \wedge \forall u\, \exists z\, (\neg Q(x,u) \vee Q(y,z))) =$$
$$= \forall x\, \forall y\, \forall u\, (\exists z\, P(x,y,z) \wedge \exists z\, (\neg Q(x,u) \vee Q(y,z))) =$$
$$= \forall x\, \forall y\, \forall u\, (\exists z\, P(x,y,z) \wedge \exists v\, (\neg Q(x,u) \vee Q(y,v))) =$$
$$= \forall x\, \forall y\, \forall u\, \exists v\, (\exists z\, P(x,y,z) \wedge (\neg Q(x,u) \vee Q(y,v))) =$$
$$= \forall x\, \forall y\, \forall u\, \exists v\, \exists z\, (P(x,y,z) \wedge (\neg Q(x,u) \vee Q(y,v))) =$$

c) I u ovom dijelu zadatka pored prikazanog moguća su i drugačija rješenja, ali je ključni detalj *preimenovanje* promjenljive x (tačnije, preimenovanje njenog vezanog pojavljivanja). Naime, u polaznom izrazu x ima dva pojavljivanja, od kojih je prvo vezano, a drugo slobodno (neprečišćen izraz). Posljedica postojanja slobodnog pojavljivanja ove promjenljive je da ovaj izraz *efektivno zavisi* od x, odnosno on nije zatvoren. Takav mora ostati i nakon svođenja na preneks formu, što nije moguće postići bez preimenovanja vezanog pojavljivanja promjenljive x (u suprotnom bi ona u dobijenoj preneks formi postala vezana, a mora biti slobodna).

$$\exists x\, (\neg(\exists y\, P(x,y))) \Rightarrow (\exists z\, Q(z) \Rightarrow R(x)) = \neg\exists x\, (\neg(\exists y\, P(x,y))) \vee (\neg\exists z\, Q(z) \vee R(x)) =$$
$$= \forall x\, \neg(\neg(\exists y\, P(x,y))) \vee (\forall z\, \neg Q(z) \vee R(x)) = \forall x\, \exists y\, P(x,y) \vee \forall z\, \neg Q(z) \vee R(x) =$$
$$= \forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \vee \neg Q(z)) \vee R(x) = \forall u\, \exists y\, \forall z\, (P(u,y) \vee \neg Q(z)) \vee R(x) =$$
$$= \forall u\, \exists y\, \forall z\, (P(u,y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))$$

d) Ovdje je neophodno osloboditi se implikacije prije nego što se poduzmu bilo kakve dalje akcije, jer je u suprotnom lako upasti u zamku. Naime, neko bi mogao pomisliti da kako vrijedi $\forall x\, A(x) \wedge B = \forall x\, (A(x) \wedge B)$ i $\forall x\, A(x) \vee B = \forall x\, (A(x) \vee B)$ pod uvjetom da B ne sadrži slobodna pojavljivanja od x, da analogna stvar vrijedi i za ekvivalenciju, tj. da pod istim uvjetom vrijedi $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow B = \forall x\, (A(x) \Leftrightarrow B)$. Međutim, to nije tačno, odnosno izrazi $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow B$ i $\forall x\, (A(x) \Leftrightarrow B)$ u općem slučaju nisu ekvivalentni. Zaista, ukoliko je recimo B izraz koji je identički neistinit, izraz $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow B$ tvrdi da je $\forall x\, A(x)$ neistinit, odnosno da $A(x)$ nije tačan za sve vrijednosti x (odnosno da je netačan barem za jednu vrijednost x), dok $\forall x\, (A(x) \Leftrightarrow B)$ tvrdi da je $A(x)$ netačan za sve vrijednosti x, što ni u kom slučaju nije isto. Da bi se izbjegli ovakvi problemi, ekvivalencije se treba osloboditi. Ovdje ćemo to izvesti koristeći pravilo $X \Leftrightarrow Y = (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$, mada se može koristiti i pravilo $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$ (ovo drugo je čak pogodnije u situacijama kada se traži ispitivanje valjanosti izraza sa ekvivalencijama, pogledati npr. Zadatak 4.40 pod b). Nakon toga, biće u nekoliko navrata potrebna preimenovanja promjenljivih, jer se u suprotnom neće moći nastaviti dalje. Sve u svemu, postoji mnogo različitih rješenja, ali svako od njih zahtijeva upotrebu barem 8 različitih promjenljivih. Ovdje je prikazano jedno od njih:

$$\forall x\, (P(x) \Rightarrow \exists y\, (Q(y) \wedge R(y,x))) \Leftrightarrow \exists x\, (Q(x) \wedge \exists y\, (P(y) \Rightarrow R(x,y))) =$$
$$= \forall x\, (\neg P(x) \vee \exists y\, (Q(y) \wedge R(y,x))) \Leftrightarrow \exists x\, (Q(x) \wedge \exists y\, (\neg P(y) \vee R(x,y))) =$$

$$= \forall x\,\exists y\,(\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \Leftrightarrow \exists x\,\exists y\,(Q(x) \wedge (\neg P(y) \vee R(x,y))) =$$

$$= (\forall x\,\exists y\,(\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge \exists x\,\exists y\,(Q(x) \wedge (\neg P(y) \vee R(x,y)))) \vee$$
$$\vee\, (\neg\forall x\,\exists y\,(\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge \neg\exists x\,\exists y\,(Q(x) \wedge (\neg P(y) \vee R(x,y)))) =$$
$$= (\forall x\,\exists y\,(\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge \exists x\,\exists y\,(Q(x) \wedge (\neg P(y) \vee R(x,y)))) \vee$$
$$\vee\, (\exists x\,\forall y\,\neg(\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge \forall x\,\forall y\,\neg(Q(x) \wedge (\neg P(y) \vee R(x,y)))) =$$

$$= (\forall x\,\exists y\,(\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge \exists x\,\exists y\,(Q(x) \wedge (\neg P(y) \vee R(x,y)))) \vee$$
$$\vee\, (\exists x\,\forall y\,(P(x) \wedge \neg(Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge \forall x\,\forall y\,(\neg Q(x) \vee \neg(\neg P(y) \vee R(x,y)))) =$$

$$= (\forall x\,\exists y\,(\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge \exists x\,\exists y\,(Q(x) \wedge (\neg P(y) \vee R(x,y)))) \vee$$
$$\vee\, (\exists x\,\forall y\,(P(x) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg R(y,x))) \wedge \forall x\,\forall y\,(\neg Q(x) \vee (P(y) \wedge \neg R(x,y)))) =$$

$$= (\forall x\,\exists y\,(\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge \exists z\,\exists u\,(Q(z) \wedge (\neg P(u) \vee R(z,u)))) \vee$$
$$\vee\, (\exists x\,\forall y\,(P(x) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg R(y,x))) \wedge \forall z\,\forall u\,(\neg Q(z) \vee (P(u) \wedge \neg R(z,u)))) =$$

$$= \forall x\,\exists y\,((\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge \exists z\,\exists u\,(Q(z) \wedge (\neg P(u) \vee R(z,u)))) \vee$$
$$\vee\, \exists x\,\forall y\,((P(x) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg R(y,x))) \wedge \forall z\,\forall u\,(\neg Q(z) \vee (P(u) \wedge \neg R(z,u)))) =$$

$$= \forall x\,\exists y\,\exists z\,\exists u\,((\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge (Q(z) \wedge (\neg P(u) \vee R(z,u)))) \vee$$
$$\vee\, \exists x\,\forall y\,\forall z\,\forall u\,((P(x) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg R(y,x))) \wedge (\neg Q(z) \vee (P(u) \wedge \neg R(z,u)))) =$$

$$= \forall x\,\exists y\,\exists z\,\exists u\,((\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge (Q(z) \wedge (\neg P(u) \vee R(z,u)))) \vee$$
$$\vee\, \exists v\,\forall w\,\forall s\,\forall t\,((P(v) \wedge (\neg Q(w) \vee \neg R(w,v))) \wedge (\neg Q(s) \vee (P(t) \wedge \neg R(s,t)))) =$$

$$= \forall x\,\exists y\,\exists z\,\exists u\,(((\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge (Q(z) \wedge (\neg P(u) \vee R(z,u)))) \vee$$
$$\vee\, \exists v\,\forall w\,\forall s\,\forall t\,((P(v) \wedge (\neg Q(w) \vee \neg R(w,v))) \wedge (\neg Q(s) \vee (P(t) \wedge \neg R(s,t))))) =$$

$$= \forall x\,\exists y\,\exists z\,\exists u\,\exists v\,\forall w\,\forall s\,\forall t\,(((\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge (Q(z) \wedge (\neg P(u) \vee R(z,u)))) \vee$$
$$\vee\, ((P(v) \wedge (\neg Q(w) \vee \neg R(w,v))) \wedge (\neg Q(s) \vee (P(t) \wedge \neg R(s,t)))))$$

$$= \forall x\,\exists y\,\exists z\,\exists u\,\exists v\,\forall w\,\forall s\,\forall t\,(((P(x) \Rightarrow (Q(y) \wedge R(y,x))) \wedge (Q(z) \wedge (P(u) \Rightarrow R(z,u)))) \vee$$
$$\vee\, ((P(v) \wedge (Q(w) \Rightarrow \neg R(w,v))) \wedge (Q(s) \Rightarrow (P(t) \wedge \neg R(s,t)))))$$

U posljednjem koraku je uvedena operacija implikacije pomoću pravila $\neg X \vee Y = X \Rightarrow Y$ sa ciljem da se neznatno pojednostavi izraz.