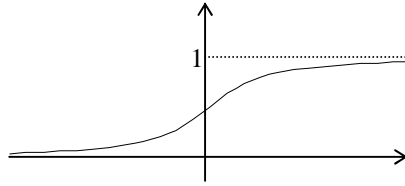


Igrajući se sa graficima elementarnih funkcija, nije teško uočiti funkcije sa traženim svojstvima. Intuitivno je nešto lakše naći bijekcije sa skupa  $\mathbb{R}$  na interval  $(0..1)$  nego obrnuto. Takve su recimo funkcije čiji grafik izgleda kao na sljedećoj slici:



Postoji neograničeno mnogo funkcija sa ovakvim grafovima. Nekoliko jednostavnijih primjera su sljedeće funkcije:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

$$f_2(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{1 + |x|} \right)$$

Mada je funkcija  $f_3(x)$  nešto manje očigledna nego prve dvije, interesantno je što se u njoj ne koriste transcendentne funkcije, nego samo elementarne aritmetičke operacije (usput, ta funkcija naziva se Valironova funkcija).

Kako su sve navedene funkcije bijekcije sa skupa  $\mathbb{R}$  na interval  $(0..1)$ , njihove inverzne funkcije su bijekcije sa intervala  $(0..1)$  na skup  $\mathbb{R}$ . Stoga su mogući primjeri traženih bijekcija sljedeće funkcije:

$$f_1^{-1}(x) = \operatorname{tg} \left( \pi x - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \pi x$$

$$f_2^{-1}(x) = \ln \left( \frac{1}{x} - 1 \right) = \ln \frac{1-x}{x}$$

$$f_3^{-1}(x) = \frac{2x-1}{1-|2x-1|}$$

Postoji još mnogo načina da se izvedu tražene bijekcije. Geometrijski je lijepa sljedeća ideja, koja na kraju upravo dovodi do funkcije koju smo gore nazvali  $f_1(x)$ . Konstrukcija prikazana na sljedećoj slici svakoj tački intervala  $(0..1)$  jednoznačno pridružuje jednu vrijednost iz skupa  $\mathbb{R}$  na brojnoj osi, i svakoj tački skupa  $\mathbb{R}$  na brojnoj osi jednoznačno odgovara jedna tačka iz intervala  $(0..1)$ :

