

Probajmo prvo naći  $f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x)$  itd. pa da vidimo javlja li se kakva pravilnost:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= f(f(x)) = a(ax+b) + b = a^2x + (a+1)b \\ f^{(3)}(x) &= f(f^{(2)}(x)) = a(a^2x + (a+1)b) + b = a^3x + (a^2+a+1)b \\ f^{(4)}(x) &= f(f^{(3)}(x)) = a(a^3x + (a^2+a+1)b) + b = a^4x + (a^3+a^2+a+1)b \end{aligned}$$

Odavde se lako može naslutiti da vrijedi sljedeća formula:

$$f^{(n)}(x) = a^n x + (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)b$$

Pokažimo matematičkom indukcijom da je ova formula tačna. Prvo, ona je tačna za  $n=1$ . Pretpostavimo da je tačna za neko  $n = k$ , tj. da je

$$f^{(k)}(x) = a^k x + (a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a^2 + a + 1)b$$

Tada je:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= f(f^{(k)}(x)) = a(a^k x + (a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a^2 + a + 1)b) + b \\ &= a^{k+1}x + (a^k + a^{k-1} + \dots + a^2 + a + 1)b \end{aligned}$$

Dakle, formula je tada tačna i za  $n = k + 1$  tako da je, prema principu matematičke indukcije, ona tačna za svako  $n \in \mathbb{N}$ . Ova formula ipak nije posve eksplicitna, jer se u zagradi javljaju tri tačkice. Međutim, kako je u zagradi geometrijski red, njegova suma se lako nalazi, te dobijamo formulu

$$f^{(n)}(x) = a^n x + \frac{a^n - 1}{a - 1} b$$

Ako ćemo biti posve dosljedni, ova formula vrijedi samo za  $a \neq 1$ , jer se za  $a = 1$  javlja nula u nazivniku. Međutim, lako se vidi da za  $a = 1$  vrijedi  $f^{(n)}(x) = x + nb$ , jer u zagradi imamo  $n$  jedinica. Dakle, konačno je:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} a^n x + \frac{a^n - 1}{a - 1} b, & \text{za } a \neq 1 \\ x + nb, & \text{za } a = 1 \end{cases}$$