

Na osnovu tvrdnje iz Zadatka 1.6, iz pretpostavki $PQ = \perp$ i $P \vee Q = T$ slijedi da je $Q = \bar{P}$. Za dokaz prve De Morganove teoreme uzećemo da je $P = XY$ i $Q = \bar{X} \vee \bar{Y}$. Imamo

$$\begin{aligned} PQ &= XY(\bar{X} \vee \bar{Y}) = XY\bar{X} \vee XY\bar{Y} = YX\bar{X} \vee XY\bar{Y} = \\ &= (Y \wedge \perp) \vee (X \wedge \perp) = \perp \vee \perp = \perp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \vee Q &= XY \vee \bar{X} \vee \bar{Y} = \bar{X} \vee XY \vee \bar{Y} = (\bar{X} \vee X)(\bar{X} \vee Y) \vee \bar{Y} = T \wedge (\bar{X} \vee Y) \vee \bar{Y} = \\ &= (\bar{X} \vee Y) \wedge T \vee \bar{Y} = (\bar{X} \vee Y) \vee \bar{Y} = \bar{X} \vee (Y \vee \bar{Y}) = \bar{X} \vee T = T \end{aligned}$$

Dakle, pretpostavke $PQ = \perp$ i $P \vee Q = T$ su ispunjene (ovdje nismo insistirali na isključivoj primjeni aksioma logike iskaza, nego su se korištena i pravila $X \wedge \perp = \perp$ i $X \vee T = T$, za koje je pokazano kako se dokazuju pomoću aksioma logike iskaza). Sada, na osnovu zaključka tvrdnje prema kojem tada mora biti $Q = \bar{P}$, neposredno slijedi da je $\bar{X} \vee \bar{Y} = \overline{XY}$ odnosno $\overline{XY} = \bar{X} \vee \bar{Y}$, što je i trebalo dokazati.

Za dokaz druge De Morganove teoreme uzećemo da je $P = X \vee Y$ i $Q = \bar{X}\bar{Y}$. Imamo

$$\begin{aligned} PQ &= (X \vee Y)\bar{X}\bar{Y} = \bar{X}\bar{Y}(X \vee Y) = \bar{X}\bar{Y}X \vee \bar{X}\bar{Y}Y = \bar{Y}X\bar{X} \vee \bar{X}Y\bar{Y} = \\ &= (\bar{Y} \wedge \perp) \vee (\bar{X} \wedge \perp) = \perp \vee \perp = \perp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \vee Q &= X \vee Y \vee \bar{X}\bar{Y} = X \vee (Y \vee \bar{X})(Y \vee \bar{Y}) = X \vee (Y \vee \bar{X}) \wedge T = \\ &= X \vee Y \vee \bar{X} = Y \vee X \vee \bar{X} = Y \vee T = T \end{aligned}$$

Vidimo da su i ovdje ispunjene pretpostavke $PQ = \perp$ i $P \vee Q = T$. Sada, na osnovu zaključka tvrdnje prema kojem tada mora biti $Q = \bar{P}$, neposredno slijedi da je $\bar{X}\bar{Y} = \overline{X \vee Y}$ odnosno $\overline{X \vee Y} = \bar{X}\bar{Y}$, što je i trebalo dokazati.