

Dokaz se može izvesti indukcijom po broju promjenljivih. Neka je n broj promjenljivih. Za $n = 1$ tvđenje je tačno. Zaista, postoje samo četiri različite neekvivalentne logičke funkcije od jedne promjenljive, a to su $F(X) = X$, $F(X) = \bar{X}$, $F(X) = \perp$ i $F(X) = \top$. Ako eliminiramo posljednje dvije funkcije koje su konstantne, samo je funkcija $F(X) = X$ monotona, jer funkcija $F(X) = \bar{X}$ očigledno nije monotona, s obzirom da za nju vrijedi $F(\perp) > F(\top)$. Kako se funkcija $F(X) = X$ može napisati bilo kao $F(X) = X X$ ili $F(X) = X \vee X$, to je za nju tvđenje tačno.

Pretpostavimo sada da je tvđenje tačno za $n = k$ gdje je k neki prirodan broj, tj. pretpostavimo da se svaka monotona funkcija $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ od $n = k$ promjenljivih različita od konstanti “ \top ” i “ \perp ” može izraziti samo preko operacija konjunkcije i disjunkcije i pokažimo da iz te pretpostavke slijedi da se isto može uraditi i za svaku funkciju $F(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1})$ od $n = k + 1$. Pokažemo li to, tvđenje tada slijedi iz principa matematičke indukcije.

Lako se vidi da vrijedi razvoj

$$F(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}) = F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) \bar{X}_{k+1} \vee F(X_1, X_2, \dots, X_k, \top) X_{k+1}$$

Zaista, odmah se vidi da su lijeva i desna strana jednake i za $X_{k+1} = \perp$ i za $X_{k+1} = \top$, a treće mogućnosti nema. Dalje, prema osobini monotonosti vrijedi $F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) \leq F(X_1, X_2, \dots, X_k, \top)$, odakle slijedi da je ili $F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) = \perp$, ili $F(X_1, X_2, \dots, X_k, \top) = \top$, ili $F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) = F(X_1, X_2, \dots, X_k, \top)$. Razmotrimo posebno svaku od ove tri mogućnosti.

U prvom slučaju imamo

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}) &= \perp \wedge \bar{X}_{k+1} \vee F(X_1, X_2, \dots, X_k, \top) X_{k+1} = \\ &= \perp \vee F(X_1, X_2, \dots, X_k, \top) X_{k+1} = F(X_1, X_2, \dots, X_k, \top) X_{k+1} \end{aligned}$$

U drugom slučaju imamo

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}) &= F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) \bar{X}_{k+1} \vee \top \wedge X_{k+1} = \\ &= X_{k+1} \vee \bar{X}_{k+1} F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) = X_{k+1} \vee F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) \end{aligned}$$

U trećem slučaju imamo

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}) &= F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) X_{k+1} \vee F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) X_{k+1} = \\ &= F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) (\bar{X}_{k+1} \vee X_{k+1}) = F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp) \end{aligned}$$

Vidimo da se u sva tri slučaja $F(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1})$ može prikazati izrazom u kojima se eventualno javljaju samo izrazi $F(X_1, X_2, \dots, X_k, \top)$, $F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp)$, promjenljiva X_{k+1} te operacije konjunkcije i disjunkcije. Kako su $F(X_1, X_2, \dots, X_k, \top)$ i $F(X_1, X_2, \dots, X_k, \perp)$ funkcije od $n = k$ promjenljivih za koje je pretpostavljeno da se mogu izraziti samo pomoću operacija konjunkcije i disjunkcije, slijedi da se uz pretpostavku monotonosti na isti način može izraziti i funkcija $F(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1})$ od $n = k + 1$ promjenljivih, čime je dokaz završen.