a) Testiranje da li se radi o elementarnoj bazi iskazne algebre ili ne najbolje se može izvesti pomoću Postove teoreme. Istražimo stoga koja od svojstava koja se pominju u Postovoj teoremi posjeduju implikacija i operacija zabrane.

Implikacija očigledno zadržava istinu, jer je $\top \Rightarrow \top = \top$, ali ne zadržava neistinu, jer je $\bot \Rightarrow \bot \neq \bot$. S druge strane, operacija zabrane ne zadržava istinu, jer je $\top \,\Delta\, \top \neq \top$, ali zadržava neistinu, jer je $\bot \,\Delta\, \bot = \bot$.

Što se tiče linearnosti, nije teško vidjeti da su ekskluzivna disjunkcija i ekvivalencija jedine dvije netrivijalne linearne operacije sa dva argumenta (pod netrivijalnim se misli da one zaista zavise od oba svoja operanda). Zaista, svaka linearna operacija od dva argumenta x_1 i x_2 mora biti takva da joj se vrijednost može izraziti u obliku $a_0 \veebar a_1 x_1 \veebar a_2 x_2$ gdje su a_0, a_1 i a_2 neke konstante iz skupa $\{\bot, \top\}$. Međutim, ukoliko želimo da ova vrijednost zaista efektivno zavisi i od x_1 i od x_2, mora biti $a_1 = a_2 = \top$, čime ona dobija oblik $a_0 \veebar x_1 \veebar x_2$. Ovo ostavlja samo dvije mogućnosti: $a_0 = \bot$ i $a_0 = \top$. Prva mogućnost daje izraz $x_1 \veebar x_2$, što je ekskluzivna disjunkcija. Druga mogućnost daje izraz $\top \veebar x_1 \veebar x_2$, za koji se lako uviđa da je ekvivalentan sa $x_1 \Leftrightarrow x_2$. Dakle, ekskluzivna disjunkcija i ekvivalencija su zaista jedine netrivijalne linearne operacije sa dva argumenta. Slijedi da niti implikacija niti operacija zabrane nisu linearne.

Što se tiče samodualnosti, implikacija nije samodualna, jer je u općem slučaju $\overline{x}_1 \Rightarrow \overline{x}_2 \neq \overline{x_1 \Rightarrow x_2}$ (recimo, za $x_1 = x_2 = \top$ lijeva strana jednaka je $\top$, a desna $\bot$). Operacija zabrane također nije samodualna, jer je u općem slučaju $\overline{x}_1 \,\Delta\, \overline{x}_2 \neq \overline{x_1 \,\Delta\, x_2}$ (recimo, za $x_1 = x_2 = \top$ lijeva strana jednaka je $\bot$, a desna $\top$). Zapravo, na sličan način se može pokazati da niti jedna netrivijalna operacija sa dva argumenta nije samodualna.

Što se tiče monotonosti, implikacija nije monotona (neopadajuća), jer iako je $\bot \leq \top$, ne vrijedi $\bot \Rightarrow \bot \leq \bot \Rightarrow \top$. Monotona nije ni operacija zabrane, jer ne vrijedi $\top \,\Delta\, \bot \leq \top \,\Delta\, \top$.

Sada se vidi da skup $\{\Rightarrow, \Delta\}$ zaista obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu (Δ), zatim koja ne zadržava neistinu ($\Rightarrow$), zatim koja nije linearna (obje su takve), zatim koja nije samodualna (obje su takv) i na kraju, koja nije monotona (obje su takve). Isto tako, da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili implikaciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava neistinu. S druge strane, ako bismo izbacili operaciju zabrane, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu.

Preostaje još da se negacija, konjunkcija i disjunkcija izraze preko implikacije i operacije zabrane. Najbolje je početi od negacije, s obzirom da se za nju rješenje obično najlakše pronađe. Recimo, može se iskoristiti činjenica da je po definiciji operacije zabrane očigledno da je $\overline{\mathrm{X}} = \top \,\Delta\, \mathrm{X}$ a konstantu $\top$ možemo izraziti kao $\mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{X}$:

$$\overline{\mathrm{X}} = \top \,\Delta\, \mathrm{X} = (\mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{X}) \,\Delta\, \mathrm{X}$$

Ima i drugih, podjednako kratkih rješenja za negaciju. Recimo, može se iskoristiti činjenica navedena u udžbeniku prema kojoj je $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \Rightarrow \bot$, a konstanta $\bot$ se može dobiti kao $\mathrm{X} \,\Delta\, \mathrm{X}$:

$$\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \Rightarrow \bot = \mathrm{X} \Rightarrow (\mathrm{X} \,\Delta\, \mathrm{X})$$

Sad kad znamo kako se može izraziti negacija, nije teško izvesti izraze kojima se konjunkcija i disjunkcija izražavaju preko implikacije i operacije zabrane, prostim izvrtanjem izraza kojima se implikacija i operacija zabrane izražavaju preko konjunkcije, disjunkcije i negacije:

$$\mathrm{XY} = \mathrm{X}\overline{\overline{\mathrm{Y}}} = \mathrm{X} \,\Delta\, \overline{\mathrm{Y}} = \mathrm{X} \,\Delta\, ((\mathrm{Y} \Rightarrow \mathrm{Y}) \,\Delta\, \mathrm{Y})$$

$$\mathrm{X} \vee \mathrm{Y} = \overline{\overline{\mathrm{X}}} \vee \mathrm{Y} = \overline{\mathrm{X}} \Rightarrow \mathrm{Y} = ((\mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{X}) \,\Delta\, \mathrm{X}) \Rightarrow \mathrm{Y}$$

Naravno, moguća su i druga rješenja, ovisno kako izrazimo negaciju. Međutim, ovo nisu optimalna rješenja. Optimalno rješenje može se dobiti sljedećim lancem transformacija:

$$XY = XY \vee \perp = XY \vee Y\overline{Y} = Y(X \vee \overline{Y}) = Y\,\overline{Y\overline{X}} = Y\,\Delta\,(Y\,\Delta\,X)$$

$$X \vee Y = X \vee \overline{X}Y = \overline{\overline{Y}}\,\overline{X} \vee X = \overline{\overline{Y} \vee X} \vee X = \overline{Y \Rightarrow X} \vee X = (Y \Rightarrow X) \Rightarrow X$$

Ova rješenja su dovoljno kratka da se mogu otkriti i intuitivnim putem. Moguće je pokazati da kraćih rješenja nema (ima ih još nekoliko iste dužine). Uglavnom, slijedi da se jedno od više optimalnih rješenja može uz simboliku koja se tipično koristi u klasičnoj logici iskaza iskazati ovako:

$$\neg X = (X \Rightarrow X)\,\Delta\,X$$

$$X \wedge Y = Y\,\Delta\,(Y\,\Delta\,X)$$

$$X \vee Y = (Y \Rightarrow X) \Rightarrow X$$

U svakom slučaju, već i činjenica da se negacija, konjunkcija i disjunkcija mogu izraziti preko operacija iz razmatranog skupa predstavlja dovoljan dokaz da razmatrani skup formira bazu iskazne algebre. Nakon toga, njena se elementarnost može se pokazati tako što se pokaže da se niti implikacija niti operacija zabrane ne mogu odbaciti a da i dalje imamo bazu. To je najbolje uraditi pomoću Postove teoreme, ali pri tome nije potrebno provoditi cijeli postupak, nego je samo dovoljno pronaći uvjete koji ne bi bili zadovoljeni ako bismo izbacili neku od operacija. Recimo, vidi se da implikacija zadržava istinu, jer je $\top \Rightarrow \top = \top$. Stoga operaciju zabrane ne možemo odbaciti, jer u suprotnom ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu. S druge strane, operacija zabrane zadržava neistinu, jer je $\perp \Delta \perp = \perp$. Ovo je sasvim dovoljno da se zaključi da se radi o elementarnoj bazi.

b) Osobine operacije zabrane smo već proučili pod a) i zaključili smo da ona ne zadržava istinu, nije niti linearna niti samodualna niti monotona, ali zadržava neistinu. Stoga za primjenu Postove teoreme treba proučiti još osobine ekvivalencije (zapravo, kako sama operacija zabrane ispunjava 4 od 5 uvjeta iz Postove teoreme, za formiranje baze dovoljna je još samo neka operacija koja ne zadržava neistinu).

Ekvivalencija zadržava istinu jer je $\top \Leftrightarrow \top = \top$, ali ne zadržava neistinu, jer je $\perp \Leftrightarrow \perp \neq \perp$. Dalje, iz diskusije provedene pod a) slijedi da je ekvivalencija linearna operacija. Međutim, ona nije samodualna, jer je u općem slučaju $\overline{x}_1 \Leftrightarrow \overline{x}_2 \neq \overline{x_1 \Leftrightarrow x_2}$ (recimo, za $x_1 = x_2 = \perp$ lijeva strana ima vrijednost $\top$, a desna $\perp$). Isto tako, ekvivalencija nije ni monotona, jer iako je $\perp \leq \top$, ne vrijedi $\perp \Leftrightarrow \perp \leq \perp \Leftrightarrow \top$.

Sada se vidi da skup $\{\Leftrightarrow, \Delta\}$ zaista obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu (Δ), zatim koja ne zadržava neistinu ($\Leftrightarrow$), zatim koja nije linearna (Δ), zatim koja nije samodualna (obje su takve) i na kraju, koja nije monotona (obje su takve). Isto tako, da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili ekvivalenciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava neistinu. S druge strane, ako bismo izbacili operaciju zabrane, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu niti operaciju koja nije linearna.

Ostaje još da se negacija, konjunkcija i disjunkcija izraze preko operacija iz ove baze. Negacija se može izraziti veoma slično kao pod a), recimo kao

$$\overline{X} = \top\,\Delta\,X = (X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,X$$

ili kao

$$\overline{X} = X \Leftrightarrow \perp = X \Leftrightarrow (X\,\Delta\,X)$$

Za konjunkciju smo već pod a) pokazali kako se može izraziti samo pomoću operacije zabrane, koja se nalazi u bazi. Kada su na raspolaganju negacija i bilo konjunkcija bilo disjunkcija, ona druga od njih može se uvijek načelno izraziti uz pomoć De Morganovih teorema. Tako se disjunkcija može barem u načelu izraziti recimo ovako (grubim uvrštavanjem):

$$X \vee Y = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{\overline{Y}\,\Delta\,(\overline{Y}\,\Delta\,\overline{X})} = \top\,\Delta\,((\top\,\Delta\,Y)\,\Delta\,((\top\,\Delta\,Y)\,\Delta\,(\top\,\Delta\,X))) =$$
$$= (X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,(((X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,Y)\,\Delta\,(((X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,Y)\,\Delta\,((X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,X)))$$

Mada nema sumnje da je ovo ispravno rješenje, ono je vrlo ružno. Mnogo je mudrije iskoristiti neke očigledne činjenice o operacijama koje se koriste, kao npr. činjenicu da je $\overline{Y}\,\Delta\,\overline{X} = X\,\Delta\,Y$:

$$X \vee Y = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{\overline{Y}\,\Delta\,(\overline{Y}\,\Delta\,\overline{X})} = \overline{\overline{Y}\,\Delta\,(X\,\Delta\,Y)} = \top\,\Delta\,((\top\,\Delta\,Y)\,\Delta\,(X\,\Delta\,Y)) =$$
$$= (X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,(((X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,Y)\,\Delta\,(X\,\Delta\,Y))$$

Ovo rješenje nije toliko ružno koliko prethodno, ali može i mnogo bolje (čak se i nasumičnim isporobavanjima mogu naći bolja rješenja). Recimo, sljedećim lancem transformacija dobija se neznatno kraće rješenje:

$$X \vee Y = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{\overline{X}\,\Delta\,Y} = \top\,\Delta\,((\top\,\Delta\,X)\,\Delta\,Y) = (X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,(((X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,X)\,\Delta\,Y)$$

Ipak, ni ovo nije najkraće rješenje, jer se još bolje rješenje može dobiti sljedećim lancem transformacija:

$$X \vee Y = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{\bot \vee \overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{XY\overline{Y} \vee \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Y}} = \overline{(XY \vee \overline{X}\,\overline{Y})\,\overline{Y}} = \overline{(X \Leftrightarrow Y)\,\Delta\,Y} =$$
$$= (X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,((X \Leftrightarrow Y)\,\Delta\,Y)$$

Alternativno, sljedeći lanac transformacija daje rješenje iste dužine, ali sa jednim parom zagrada manje, tako da se može smatrati neznatno boljim:

$$X \vee Y = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y} \vee \bot} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y} \vee Y\overline{Y}} = \overline{(\overline{X} \vee Y)\,\overline{Y}} = \overline{\overline{X\overline{Y}}\,\overline{Y}} = \overline{\overline{X\overline{Y}}\,\overline{Y} \vee \bot} =$$
$$= \overline{\overline{X\overline{Y}}\,\overline{Y} \vee X\overline{Y}Y} = \overline{X\overline{Y} \Leftrightarrow Y} = \overline{(X\,\Delta\,Y) \Leftrightarrow Y} = (X\,\Delta\,Y) \Leftrightarrow Y \Leftrightarrow (X\,\Delta\,X)$$

Moguće je pokazati da kraćih rješenja nema (ima ih još nekoliko iste dužine). Uglavnom, slijedi da se jedno od više optimalnih rješenja može uz simboliku koja se tipično koristi u klasičnoj logici iskaza iskazati ovako:

$$\neg X = (X \Leftrightarrow X)\,\Delta\,X$$
$$X \wedge Y = Y\,\Delta\,(Y\,\Delta\,X)$$
$$X \vee Y = (X\,\Delta\,Y) \Leftrightarrow Y \Leftrightarrow (X\,\Delta\,X)$$

c) Osobine operacije zabrane smo već proučili pod a), tako da treba proučiti još osobine negacije. Negacija očigledno ne zadržava ni istinu ni neistinu, jer je $\neg\top \neq \top$ i $\neg\bot \neq \bot$. Međutim, ona je linearna, jer vrijedi $\neg x = \top \vee \top x$. Isto tako, negacija je i samodualna, jer vrijedi $\neg\overline{x} = \overline{\neg x}$ (obje strane su zapravo $\neg\neg x$, tj. x). Ipak, ona nije monotona, jer iako je $\bot \leq \top$, ne vrijedi $\neg\bot \leq \neg\top$.

Sada se vidi da skup $\{\Delta, \neg\}$ zaista obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu (obje su takve), zatim koja ne zadržava neistinu ($\neg$), zatim koja nije linearna (Δ), zatim koja nije samodualna (Δ) i na kraju, koja nije monotona (obje su takve). Isto tako, da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili operaciju zabrane, ne bismo imali operaciju koja nije linearna, niti operaciju koja nije samodualna. S druge strane, ako bismo izbacili negaciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava neistinu.

Što se tiče izražavanja konjunkcije i disjunkcije preko operacija iz ove baze, to je u ovom slučaju sasvim jednostavno. Zaista, imamo

$$XY = X\overline{\overline{Y}} = X \Delta \overline{Y}$$

$$X \vee Y = \overline{\overline{X \vee Y}} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{\overline{X} \Delta Y}$$

Ili, zapisano simbolikom koja se tipično koristi u klasičnoj logici iskaza:

$$X \wedge Y = X \Delta \neg Y$$

$$X \vee Y = \neg(\neg X \Delta Y)$$

d) Kako su osobine operacije zabrane već proučene, treba još proučiti osobine konstante $\top$. Ona trivijalno zadržava istinu (ona je istina sama po sebi), ali naravno ne zadržava neistinu (samim tim što je uvijek istinita). Ona je također trivijalno linearna, jer se dobija ukoliko se u definiciji linearnosti stavi da je $a_0 = \top$, dok su sve konstante a_i jednake $\bot$.

Da bi se pokazalo da konstanta $\top$ nije samodualna, neophodna je malo veća doza apstraktnog formalnog logičkog rasuđivanja. Naime, iz definicije se zaključuje da osobina samodualnosti zapravo vrijedi ukoliko negiranje svih argumenata operacije proizvodi istu vrijednost kao i negiranje rezultata operacije nad izvornim argumentima. Kako konstanta $\top$ zapravo nema argumenata, negiranje njenih (nepostojećih) "argumenata" ne mijenja njenu vrijednost. S druge strane, negiranje njenog "rezultata" (koji je naravno $\top$) daje vrijednost $\bot$, što nije ista vrijednost koja je dobijena nakon prethodno opisanog negiranja "argumenata". Dakle, konstanta $\top$ definitivno nije samodualna.

Konačno, konstanta $\top$ je trivijalno monotona. Zaista, u definiciji monotonosti, pretpostavka $x_i' \le x_i$" ne može se ispuniti (s obzirom da konstanta nema argumenata), a svaki iskaz u formi implikacije smatra se tačnim ukoliko je pretpostavka netačna.

Sada se vidi da skup $\{\Delta, \top\}$ zaista obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu (Δ), zatim koja ne zadržava neistinu ($\top$), zatim koja nije linearna (Δ), zatim koja nije samodualna (obje su takve) i na kraju, koja nije monotona (Δ). Isto tako, da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili operaciju zabrane, ne bismo imali niti operaciju koja ne zadržava neistinu, niti operaciju koja nije linearna, niti operaciju koja nije samodualna. S druge strane, ako bismo izbacili negaciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava neistinu.

Preostaje još da se negacija, konjunkcija i disjunkcija izraze preko operacija iz baze. Pitanje negacije je riješeno još u diskusiji pod a), a što se tiče konjunkcije i disjunkcije, imamo:

$$XY = X \Delta \overline{Y} = X \Delta (\top \Delta Y)$$

$$X \vee Y = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{\overline{X} \Delta Y} = \top \Delta ((\top \Delta X) \Delta Y)$$

Stoga, uz korištenje simbolike koja se tipično koristi u klasičnoj logici iskaza, imamo:

$$\neg X = \top \Delta Y$$

$$X \wedge Y = X \Delta (\top \Delta Y)$$

$$X \vee Y = \top \Delta ((\top \Delta X) \Delta Y)$$