a) Testiranje da li se radi o elementarnoj bazi iskazne algebre ili ne najbolje se može izvesti pomoću Postove teoreme. Istražimo stoga koja od svojstava koja se pominju u Postovoj teoremi posjeduju implikacija i negacija.

Implikacija očigledno zadržava istinu, jer je $\top \Rightarrow \top = \top$, ali ne zadržava neistinu, jer je $\perp \Rightarrow \perp \neq \perp$. Negacija naravno ne zadržava ni istinu ni neistinu, jer je $\neg\top \neq \top$ i $\neg\perp \neq \perp$.

Što se tiče linearnosti, negacija je linearna, jer vrijedi $\neg\, x = \top \vee \top x$. S druge strane, implikacija nije linearna, jer nije teško vidjeti da su ekskluzivna disjunkcija i ekvivalencija jedine dvije netrivijalne linearne operacije sa dva argumenta (pod netrivijalnim se misli da one zaista zavise od oba svoja operanda). Zaista, svaka linearna operacija od dva argumenta x_1 i x_2 mora biti takva da joj se vrijednost može izraziti u obliku $a_0 \underline{\vee}\, a_1 x_1 \underline{\vee}\, a_2 x_2$ gdje su a_0, a_1 i a_2 neke konstante iz skupa $\{\perp, \top\}$. Međutim, ukoliko želimo da ova vrijednost zaista efektivno zavisi i od x_1 i od x_2, mora biti $a_1 = a_2 = \top$, čime ona dobija oblik $a_0 \underline{\vee}\, x_1 \underline{\vee}\, x_2$. Ovo ostavlja samo dvije mogućnosti: $a_0 = \perp$ i $a_0 = \top$. Prva mogućnost daje izraz $x_1 \underline{\vee}\, x_2$, što je ekskluzivna disjunkcija. Druga mogućnost daje izraz $\top \underline{\vee}\, x_1 \underline{\vee}\, x_2$, za koji se lako uviđa da je ekvivalentan sa $x_1 \Leftrightarrow x_2$. Dakle, ekskluzivna disjunkcija i ekvivalencija su zaista jedine netrivijalne linearne operacije sa dva argumenta.

Što se tiče samodualnosti, negacija jeste samodualna, jer vrijedi $\neg\overline{x} = \overline{\neg\, x}$ (obje strane su zapravo $\neg\neg\, x$, tj. x). Implikacija nije samodualna, jer je u općem slučaju $\overline{x}_1 \Rightarrow \overline{x}_2 \neq \overline{x_1 \Rightarrow x_2}$ (recimo, za $x_1 = x_2 = \top$ lijeva strana jednaka je $\top$, a desna $\perp$). Zapravo, na sličan način se može pokazati da niti jedna netrivijalna operacija sa dva argumenta nije samodualna.

Što se tiče monotonosti, jasno je da negacija nije monotona (neopadajuća), jer iako je $\perp \leq \top$, ne vrijedi $\neg\perp \leq \neg\top$. Monotona nije ni implikacija, jer ne vrijedi $\perp \Rightarrow \perp \leq \perp \Rightarrow \top$.

Sada se vidi da skup $\{\Rightarrow, \neg\}$ zaista obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu ($\neg$), zatim koja ne zadržava neistinu (obje su takve), zatim koja nije linearna ($\Rightarrow$), zatim koja nije samodualna ($\Rightarrow$) i na kraju, koja nije monotona (obje su takve). Isto tako, da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili implikaciju, ne bismo imali operaciju koja nije linearna niti operaciju koja nije samodualna. S druge strane, ako bismo izbacili negaciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu.

Da se radi o bazi, možemo zaključiti već na osnovu činjenice da se konjunkcija i disjunkcija mogu izraziti preko implikacije i negacije. Zaista, imamo

$$\mathrm{XY} = \overline{\overline{\mathrm{XY}}} = \overline{\overline{\mathrm{X}} \vee \overline{\mathrm{Y}}} = \overline{\mathrm{X} \Rightarrow \overline{\mathrm{Y}}}$$

$$\mathrm{X} \vee \mathrm{Y} = \overline{\overline{\mathrm{X}}} \vee \mathrm{Y} = \overline{\mathrm{X}} \Rightarrow \mathrm{Y}$$

Ili, zapisano simbolikom koja se tipično koristi u klasičnoj logici iskaza:

$$\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y} = \neg(\mathrm{X} \Rightarrow \neg\mathrm{Y})$$

$$\mathrm{X} \vee \mathrm{Y} = \neg\mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{Y}$$

Nakon toga, njena se elementarnost može se pokazati tako što se pokaže da se niti implikacija niti negacija ne mogu odbaciti a da i dalje imamo bazu. To je najbolje uraditi pomoću Postove teoreme, ali pri tome nije potrebno provoditi cijeli postupak, nego je samo dovoljno pronaći uvjete koji ne bi bili zadovoljeni ako bismo izbacili neku od operacija. Recimo, vidi se da implikacija zadržava istinu, jer je $\top \Rightarrow \top = \top$. Stoga negaciju ne možemo odbaciti, jer u suprotnom ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu. S druge strane, kako je negacija linearna, implikaciju ne možemo odbaciti, jer u suprotnom ne bismo imali operaciju koja nije linearna. Ovo je sasvim dovoljno da se zaključi da se radi o elementarnoj bazi.

b) Osobine implikacije smo već proučili pod a) i zaključili smo da ona ne zadržava neistinu, nije niti linearna niti samodualna niti monotona, ali zadržava istinu. Stoga za primjenu Postove teoreme treba proučiti još osobine ekskluzivne disjunkcije.

Ekskluzivna disjunkcija zadržava neistinu, jer je $\perp \underline{\vee} \perp = \perp$, ali ne zadržava istinu, s obzirom da je $\top \underline{\vee} \top \neq \top$. Iz diskusije pod a) već je zaključeno da je ekskluzivna disjunkcija linearna. Međutim, ona nije samodualna, jer je u općem slučaju $\overline{x_1} \underline{\vee} \overline{x_2} \neq \overline{x_1 \underline{\vee} x_2}$ (recimo, za $x_1 = x_2 = \perp$ lijeva strana ima vrijednost $\perp$, a lijeva $\top$. Isto tako, ona nije ni monotona, jer iako je $\perp \leq \top$, ne vrijedi $\top \underline{\vee} \perp \leq \top \underline{\vee} \top$.

Sada se vidi da skup $\{\Rightarrow, \underline{\vee}\}$ zaista obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu ($\underline{\vee}$), zatim koja ne zadržava neistinu ($\neg$), zatim koja nije linearna ($\Rightarrow$), zatim koja nije samodualna (obje su takve) i na kraju, koja nije monotona (obje su takve). Isto tako, da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili implikaciju, ne bismo imali operaciju koja nije linearna. S druge strane, ako bismo izbacili ekskluzivnu disjunkciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu.

Preostaje još da se negacija, konjunkcija i disjunkcija izraze preko implikacije i ekskluzivne disjunkcije. Najbolje je početi od negacije, s obzirom da se za nju rješenje obično najlakše pronađe. Recimo, može se iskoristiti činjenica da je po definiciji ekskluzivne disjunkcije očigledno da je $\overline{X} = X \underline{\vee} \top$, a konstantu $\top$ možemo izraziti kao $X \Rightarrow X$:

$$\overline{X} = X \underline{\vee} \top = X \underline{\vee} (X \Rightarrow X)$$

Ima i drugih, podjednako kratkih rješenja za negaciju. Recimo, može se iskoristiti činjenica navedena u udžbeniku prema kojoj je $\overline{X} = X \Rightarrow \perp$, a konstanta $\perp$ se može dobiti kao $X \underline{\vee} X$:

$$\overline{X} = X \Rightarrow \perp = X \Rightarrow (X \underline{\vee} X)$$

Disjunkciju je lakše izraziti preko razmatrane baze nego konjunkciju. Recimo, najlakši put da se to izvede je sljedeći (s obzirom da već znamo kako izraziti negaciju):

$$X \vee Y = \overline{\overline{X}} \vee Y = \overline{X} \Rightarrow Y = (X \underline{\vee} (X \Rightarrow X)) \Rightarrow Y$$

Međutim, na ovaj način se ne dobija optimalno rješenje. Najkraće rješenje, koje je dovoljno kratko da se lako može otkriti i intuitivnim putem, dobija se sljedećom transformacijom:

$$X \vee Y = X \vee \overline{X}Y = \overline{\overline{Y}}\,\overline{X} \vee X = \overline{\overline{Y} \vee X} \vee X = \overline{Y \Rightarrow X} \vee X = (Y \Rightarrow X) \Rightarrow X$$

Kada su na raspolaganju negacija i bilo konjunkcija bilo disjunkcija, ona druga od njih može se uvijek načelno izraziti uz pomoć De Morganovih teorema. Tako se konjunkcija može barem u načelu izraziti recimo ovako (grubim uvrštavanjem):

$$XY = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{(\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}) \Rightarrow \overline{X}} = (((Y \underline{\vee} \top) \Rightarrow (X \underline{\vee} \top)) \Rightarrow (X \underline{\vee} \top)) \underline{\vee} \top =$$
$$= (((Y \underline{\vee} (X \Rightarrow X)) \Rightarrow (X \underline{\vee} (X \Rightarrow X))) \Rightarrow (X \underline{\vee} (X \Rightarrow X))) \underline{\vee} (X \Rightarrow X)$$

Mada nema sumnje da je ovo ispravno rješenje, ono je vrlo ružno. Mnogo je mudrije iskoristiti neke poznate činjenice o operacijama koje se koriste, kao npr. činjenicu da je $\overline{Y} \Rightarrow \overline{X} = X \Rightarrow Y$:

$$XY = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{(\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}) \Rightarrow \overline{X}} = \overline{(\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}) \Rightarrow \overline{X}} = \overline{(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \overline{X}} = ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \underline{\vee} \top)) \underline{\vee} \top =$$
$$= ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \underline{\vee} (X \Rightarrow X))) \underline{\vee} (X \Rightarrow X)$$

Ovo rješenje nije toliko ružno koliko prethodno, ali može i mnogo bolje (čak se i nasumičnim isporobavanjima mogu naći bolja rješenja). Recimo, sljedećim lancem transformacija dobija se neznatno kraće rješenje:

$$XY = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{X \Rightarrow \overline{Y}} = (X \Rightarrow (Y \veebar \top)) \veebar \top = (X \Rightarrow (Y \veebar (X \Rightarrow X))) \veebar (X \Rightarrow X)$$

Ipak, ni ovo nije najkraće rješenje, jer se još bolje rješenje može dobiti sljedećim lancem transformacija:

$$\begin{aligned} XY &= \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{\overline{X} \vee X\overline{Y}} = \overline{\overline{X} \vee \overline{X}Y \vee X\overline{Y}} = \overline{\overline{X} \vee (X \veebar Y)} = \overline{X \Rightarrow (X \veebar Y)} = \\ &= (X \Rightarrow (X \veebar Y)) \veebar (X \Rightarrow X) \end{aligned}$$

Alternativno, sljedeći lanac transformacija daje rješenje iste dužine, ali sa jednim parom zagrada manje, tako da se može smatrati neznatno boljim:

$$\begin{aligned} XY &= \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{\overline{X} \vee X\overline{Y}} = \overline{\overline{X} \vee \overline{X}Y \vee X\overline{Y}} = \overline{\overline{X}(\overline{X} \vee Y) \vee XX\overline{Y}} = \overline{\overline{X}(\overline{X} \vee Y) \vee X\overline{\overline{X} \vee Y}} = \\ &= \overline{\overline{X}(X \Rightarrow Y) \vee X\overline{X \Rightarrow Y}} = \overline{X \veebar (X \Rightarrow Y)} = X \veebar (X \Rightarrow Y) \veebar (X \Rightarrow X) \end{aligned}$$

Moguće je pokazati da kraćih rješenja nema (ima ih još nekoliko iste dužine). Uglavnom, slijedi da se jedno od više optimalnih rješenja može uz simboliku koja se tipično koristi u klasičnoj logici iskaza iskazati ovako:

$$\neg X = X \veebar (X \Rightarrow X)$$
$$X \wedge Y = X \veebar (X \Rightarrow Y) \veebar (X \Rightarrow X)$$
$$X \vee Y = (Y \Rightarrow X) \Rightarrow X$$

c) Što se tiče konjunkcije, ona zadržava i istinu i neistinu, jer je $\top \wedge \top = \top$ i $\perp \wedge \perp = \perp$. Ekvivalencija zadržava istinu jer je $\top \Leftrightarrow \top = \top$, ali ne zadržava neistinu, jer je $\perp \Leftrightarrow \perp \neq \perp$. Konstanta $\perp$ trivijalno zadržava neistinu (ona je neistina sama po sebi), ali naravno ne zadržava istinu (samim tim što nikad nije istinita).

Iz diskusije provedene pod a) vidljivo je da konjunkcija nije linearna, a ekvivalencija jeste. Konstanta $\perp$ je također trivijalno linearna, jer se dobija ukoliko se u definiciji linearnosti stavi da su sve konstante a_i jednake $\perp$.

Konjunkcija nije samodualna, jer je u općem slučaju $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \neq \overline{x_1 \wedge x_2}$ (recimo, za $x_1 = \top$ i $x_2 = \perp$ lijeva strana ima vrijednost $\perp$, a desna $\top$). Isto tako, nije samodualna ni ekvivalencija, jer je u općem slučaju $\overline{x}_1 \Leftrightarrow \overline{x}_2 \neq \overline{x_1 \Leftrightarrow x_2}$ (recimo, za $x_1 = x_2 = \perp$ lijeva strana ima vrijednost $\top$, a desna $\perp$). Da bi se pokazalo da nije samodualna ni konstanta $\perp$, neophodna je malo veća doza apstraktnog formalnog logičkog rasuđivanja. Naime, iz definicije se zaključuje da osobina samodualnosti zapravo vrijedi ukoliko negiranje svih argumenata operacije proizvodi istu vrijednost kao i negiranje rezultata operacije nad izvornim argumentima. Kako konstanta $\perp$ zapravo nema argumenata, negiranje njenih (nepostojećih) "argumenata" ne mijenja njenu vrijednost. S druge strane, negiranje njenog "rezultata" (koji je naravno $\perp$) daje vrijednost $\top$, što nije ista vrijednost koja je dobijena nakon prethodno opisanog negiranja "argumenata". Dakle, nije samodualna ni konstanta $\perp$.

Ostaje još da se istraži monotonost. Konjunkcija je monotona, s obzirom da imamo $\perp \wedge \perp \leq \top \wedge \perp$, $\perp \wedge \perp \leq \perp \wedge \top$, $\perp \wedge \top \leq \top \wedge \top$ i $\top \wedge \perp \leq \top \wedge \top$. S druge strane, ekvivalencija nije monotona, jer iako je $\perp \leq \top$, ne vrijedi $\perp \Leftrightarrow \perp \leq \perp \Leftrightarrow \top$. Konačno, konstanta $\perp$ je trivijalno monotona. Zaista, u definiciji monotonosti, pretpostavka $x_i' \leq x_i''$ ne može se ispuniti (s obzirom da konstanta nema argumenata), a svaki iskaz u formi implikacije smatra se tačnim ukoliko je pretpostavka netačna.

Sada se vidi da skup $\{\wedge, \Leftrightarrow, \perp\}$ zaista obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu ($\perp$), zatim koja ne zadržava neistinu ($\Leftrightarrow$), zatim koja nije linearna ($\wedge$), zatim koja nije samodualna (sve tri su takve) i na kraju, koja nije monotona ($\Leftrightarrow$). Da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili konjunkciju, ne bismo imali operaciju koja nije linearna. Ako bismo izbacili ekvivalenciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava neistinu, niti operaciju koja nije monotona. Konačno, bez konstante $\perp$ ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu.

Ostaje još da se pokaže kako izraziti negaciju i disjunkciju preko operacija iz ove baze. Što se negacije tiče, situacija je jednostavna, jer iz definicije ekvivalencije neposredno slijedi

$$\overline{X} = X \Leftrightarrow \perp$$

Sada, kada imamo negaciju i konjunkciju, disjunkcija se u načelu može lako izraziti primjenom De Morganove teoreme:

$$X \vee Y = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{(X \Leftrightarrow \perp)(Y \Leftrightarrow \perp)} = (X \Leftrightarrow \perp)(Y \Leftrightarrow \perp) \Leftrightarrow \perp$$

Ovaj izraz nije pretjerano komplikovan, ali postoje i mnogo kraća rješenja. Recimo, ukoliko se iskoristi lako provjerljiva činjenica da je disjunkcija distributivna prema ekvivalenciji, odnosno da vrijedi pravilo $X \vee (Y \Leftrightarrow Z) = (X \vee Y) \Leftrightarrow (X \vee Z)$, možemo pisati sljedeći lanac jednakosti, koji rezultira zaista vrlo jednostavnim izrazom:

$$X \vee Y = (\overline{X} \Leftrightarrow \perp) \vee (\overline{Y} \Leftrightarrow \perp) = (\overline{X} \vee \overline{Y}) \Leftrightarrow (\overline{X} \vee \perp) \Leftrightarrow (\overline{Y} \vee \perp) \Leftrightarrow (\perp \vee \perp) =$$
$$= (\overline{X} \vee \overline{Y}) \Leftrightarrow \overline{X} \Leftrightarrow \overline{Y} \Leftrightarrow \perp = (\overline{X} \vee \overline{Y}) \Leftrightarrow \overline{X} \Leftrightarrow Y = (\overline{X} \vee \overline{Y}) \Leftrightarrow \perp \Leftrightarrow \overline{X} \Leftrightarrow \perp \Leftrightarrow Y =$$
$$= \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} \Leftrightarrow X \Leftrightarrow Y = XY \Leftrightarrow X \Leftrightarrow Y$$

Dobijeni izraz je dovoljno jednostavan da ga je moguće pronaći intuitivnim putem ili pukim isprobavanjem. U svakom slučaju, optimalno rješenje može uz simboliku koja se tipično koristi u klasičnoj logici iskaza iskazati ovako:

$$\neg X = X \Leftrightarrow \perp$$
$$X \vee Y = (X \wedge Y) \Leftrightarrow X \Leftrightarrow Y$$

d) Osobine ekvivalencije i konstante $\perp$ proučene su u dijelu pod c). Ostaje da se prouče osobine disjunkcije. Ona zadržava i istinu i neistinu, jer je $\top \vee \top = \top$ i $\perp \vee \perp = \perp$. Isto tako, iz diskusije provedene pod a) vidi se da ona nije linearna. Ona nije ni samodualna jer je u općem slučaju $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \neq \overline{x_1 \vee x_2}$ (recimo, za $x_1 = \top$ i $x_2 = \perp$ lijeva strana ima vrijednost $\top$, a desna $\perp$). Ipak, ona jeste monotona, s obzirom da imamo $\perp \vee \perp \leq \top \vee \perp$, $\perp \vee \perp \leq \perp \vee \top$, $\perp \vee \top \leq \top \vee \top$ i $\top \vee \perp \leq \top \vee \top$.

Slično kao pod c), sada je jasno da skup $\{\vee, \Leftrightarrow, \perp\}$ zaista obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu ($\perp$), zatim koja ne zadržava neistinu ($\Leftrightarrow$), zatim koja nije linearna ($\vee$), zatim koja nije samodualna (sve tri su takve) i na kraju, koja nije monotona ($\Leftrightarrow$). Da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili disjunkciju, ne bismo imali operaciju koja nije linearna. Ako bismo izbacili ekvivalenciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava neistinu, niti operaciju koja nije monotona. Konačno, bez konstante $\perp$ ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu.

U osnovi, ovdje imamo sličnu situaciju kao pod c). Skupu koji se sastoji samo od ekvivalencije i konstante $\perp$ za formiranje baze nedostaje samo operacija koja nije linearna. Pod c) za tu operaciju odabrana je konjunkcija, a pod d) disjunkcija. Mogla se kao treća operacija upotrijebiti i bilo koja druga koja nije linearna (recimo implikacija). Međutim, interesantno je da sa implikacijom ne bismo imali elementarnu bazu, jer je u udžbeniku pokazano da već konstanta $\perp$ i implikacija (bez ekvivalencije) same za sebe tvore elementarnu bazu.

Za negaciju smo već pod c) pokazali kako se može izraziti preko ekvivalencije i konstante $\perp$. Sada kada imamo negaciju i disjunkciju, možemo iskoristiti De Morganove teoreme da izrazimo i konjunkciju. Ovdje je odmah moguće primijeniti zakon distrubutivnosti opisan pod c) sa ciljem da se dobije jednostavniji izraz:

$$XY = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}} = \overline{(X \Leftrightarrow \bot) \vee (Y \Leftrightarrow \bot)} = \overline{(X \vee Y) \Leftrightarrow (X \vee \bot) \Leftrightarrow (Y \vee \bot) \Leftrightarrow (\bot \vee \bot)} =$$

$$= \overline{(X \vee Y) \Leftrightarrow X \Leftrightarrow Y \Leftrightarrow \bot} = (X \vee Y) \Leftrightarrow X \Leftrightarrow Y$$

Za dobijeni izraz se može pokazati da je optimalan, a također je dovoljno jednostavan da ga je moguće naći intuitivnim putem ili isprobavanjem. U svakom slučaju, imamo

$$\neg X = X \Leftrightarrow \bot$$

$$X \wedge Y = (X \vee Y) \Leftrightarrow X \Leftrightarrow Y$$

e) Osobine konjunkcije i ekvivalencije proučene su pod c), a ekskluzivne disjunkcije pod b). Na osnovu toga se lako pokazuje da skup $\{\wedge, \veebar, \Leftrightarrow\}$ obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu ($\veebar$), zatim koja ne zadržava neistinu ($\Leftrightarrow$), zatim koja nije linearna ($\wedge$), zatim koja nije samodualna (sve tri su takve) i na kraju, koja nije monotona ($\veebar$ i $\Leftrightarrow$). Da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili konjunkciju, ne bismo imali operaciju koja nije linearna. Ako bismo izbacili ekskluzivnu disjunkciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu. Konačno, bez ekvivalencije ne bismo imali operaciju koja ne zadržava neistinu.

Ostaje još da se izraze negacija i disjunkcija preko operacija iz ove baze. Za negaciju, slično razmatranju pod b), imamo

$$\overline{X} = X \veebar \top = X \veebar (X \Leftrightarrow X)$$

Alternativno, jednako složeno rješenje je i sljedeće:

$$\overline{X} = X \Leftrightarrow \bot = X \Leftrightarrow (X \veebar X)$$

Za disjunkciju smo pod c) pokazali kako se može izraziti pomoću konjunkcije i ekvivalencije. Međutim, ovdje moguće je izvesti još jedno podjednako jednostavno i vrlo interesantno rješenje. Naime, krenemo li od De Morganovih teorema i primijenimo lako provjerljivu osobinu distributivnosti konjunkcije prema ekskluzivnoj disjunkciji, možemo pisati:

$$X \vee Y = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}} = \overline{(X \veebar \top)(Y \veebar \top)} = \overline{XY \veebar X \veebar Y \veebar \top} = XY \veebar X \veebar Y$$

Dobijeni izraz je ne samo krajnje jednostavan, nego je i inutitivno očigledan. Zaista, tvrditi da vrijedi X ili Y isto je što i tvrditi da vrijedi ili X, ili Y, ili da vrijede i X i Y. Isto tako, činjenica da je ovaj izraz gotovo identičan izrazu koji smo dobili pod c) samo uz upotrebu ekskluzivne disjunkcije umjesto ekvivalencije posljedica je interesantne veze $\overline{X \Leftrightarrow Y} = X \veebar Y$. Stoga se vjerovatno najlogičnije od više mogućih optimalnih rješenja za izražavanje negacije i disjunkcije preko operacija iz razmatrane baze, uz korištenje simbolike uobičajene u klasičnoj logici iskaza može se zapisati ovako:

$$\neg X = X \veebar (X \Leftrightarrow X)$$

$$X \vee Y = (X \wedge Y) \veebar X \veebar Y$$

f) Osobine disjunkcije proučene su pod d), ekskluzivne disjunkcije pod b), a ekvivalencije pod c). Na osnovu toga slijedi da skup $\{\vee, \veebar, \Leftrightarrow\}$ obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu ($\veebar$), zatim koja ne zadržava neistinu ($\Leftrightarrow$), zatim koja nije linearna ($\vee$), zatim koja nije samodualna (sve tri su takve) i na kraju, koja nije monotona ($\veebar$ i $\Leftrightarrow$). Da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili disjunkciju, ne bismo imali operaciju koja nije linearna. Ako bismo izbacili ekskluzivnu disjunkciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu. Konačno, bez ekvivalencije ne bismo imali operaciju koja ne zadržava neistinu.

Kako izraziti negaciju preko ekskluzivne disjunkcije i ekvivalencije uvidjeli smo pod e), dok smo pod d) vidjeli kako se konjunkcija može izraziti preko disjunkcije i ekvivalencije. Međutim, postoji još jedan lijep način da se konjunkcija izrazi preko disjunkcije i ekskluzivne disjunkcije:

.

$$XY = (\overline{X} \veebar \top)(\overline{Y} \veebar \top) = \overline{X}\,\overline{Y} \veebar \overline{X} \veebar \overline{Y} \veebar \top = \overline{X}\,\overline{Y} \veebar \overline{X} \veebar Y = \overline{X}\,\overline{Y} \veebar \top \veebar \overline{X} \veebar \top \veebar Y =$$
$$= \overline{\overline{X}}\,\overline{\overline{Y}} \veebar \overline{\overline{X}} \veebar Y = (\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}}) \veebar X \veebar Y = (X \vee Y) \veebar X \veebar Y$$

Dobijeno rješenje je lako intuitivno opravdati. Stoga jedno od optimalnih rješenja uz upotrebu klasične simbolike logike iskaza možemo zapisati ovako:

$$\neg X = X \veebar (X \Leftrightarrow X)$$
$$X \wedge Y = (X \vee Y) \veebar X \veebar Y$$

g) Osobine disjunkcije proučene su pod d), a ekskluzivne disjunkcije pod b). Ostaje da se prouče osobine konstante $\top$. Ona trivijalno zadržava istinu (ona je istina sama po sebi), ali naravno ne zadržava neistinu (samim tim što je uvijek istinita). Ona je također trivijalno linearna, jer se dobija ukoliko se u definiciji linearnosti stavi da je $a_0 = \top$, dok su sve konstante a_i jednake $\perp$. Konačno, da konstanta $\top$ nije samodualna ali da jeste (trivijalno) monotona, zaključujemo istim rezonovanjem koje smo pod c) proveli za konstantu $\perp$.

Sada smo prikupili dovoljno činjenica da možemo zaključiti da skup $\{\vee, \veebar, \top\}$ obrazuje bazu iskazne algebre. Zaista, u ovom skupu imamo operaciju koja ne zadržava istinu ($\veebar$), zatim koja ne zadržava neistinu ($\top$), zatim koja nije linearna ($\vee$), zatim koja nije samodualna (sve tri su takve) i na kraju, koja nije monotona ($\veebar$). Da je baza elementarna vidi se iz činjenice da ako bismo izbacili disjunkciju, ne bismo imali operaciju koja nije linearna. Ako bismo izbacili ekskluzivnu disjunkciju, ne bismo imali operaciju koja ne zadržava istinu, niti operaciju koja nije monotona. Konačno, bez konstante $\top$ ne bismo imali operaciju koja ne zadržava neistinu.

Potrebno je još izraziti negaciju i konjunkciju preko operacija iz razmatrane baze. Pitanje negacije riješeno je još u diskusiji pod b), dok je pod f) pokazano kako se konjunkcija može izraziti preko disjunkcije i ekskluzivne disjunkcije. Dakle, imamo

$$\neg X = X \veebar \top$$
$$X \wedge Y = X \veebar Y \veebar (X \vee Y)$$