

- a) Prevođenje zadanog logičkog izraza u oblik izražen preko Shefferove funkcije operaciju po operaciju korištenjem relacija $X = X \uparrow X$, $XY = (X \uparrow Y) \uparrow (X \uparrow Y)$ i $X \vee Y = (X \uparrow X) \uparrow (Y \uparrow Y)$ nije nimalo mudra ideja, jer bi se time dobio nevjerovatno kompliciran izraz. Recimo, mogli bismo krenuti ovako:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (A \uparrow A)B = ((A \uparrow A) \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow B) \\ \overline{AC} &= A(C \uparrow C) = (A \uparrow (C \uparrow C)) \uparrow (A \uparrow (C \uparrow C)) \\ \overline{BC} &= (B \uparrow B)C = ((B \uparrow B) \uparrow C) \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow C)\end{aligned}$$

Zatim bismo imali

$$\begin{aligned}\overline{AC} \vee \overline{BC} &= \\ &= (((A \uparrow (C \uparrow C)) \uparrow (A \uparrow (C \uparrow C))) \uparrow ((A \uparrow (C \uparrow C)) \uparrow (A \uparrow (C \uparrow C)))) \uparrow \\ &\quad \uparrow (((B \uparrow B) \uparrow C) \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow C)) \uparrow (((B \uparrow B) \uparrow C) \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow C))\end{aligned}$$

itd. Vidimo da smo već u ovom stadiju dobili neprihvatljivo kompliciran izraz, odakle vidimo da je bolje potražiti drugi put. Stoga ćemo izvršiti male transformacije u polaznom izrazu zasnovane na primjeni pravila dvojne negacije De Morganovih teorema, sa ciljem da se u izrazu pojave članovi koji se neposredno mogu uraditi preko Shefferove operacije:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \vee \overline{AC} \vee \overline{BC} &= \overline{AB} \vee \overline{AC} \overline{BC} = \overline{AB} \vee (A \uparrow \overline{C})(\overline{B} \uparrow C) = \overline{\overline{AB} \vee (A \uparrow \overline{C})(\overline{B} \uparrow C)} = \\ &= \overline{\overline{AB} (A \uparrow \overline{C})(\overline{B} \uparrow C)} = \overline{\overline{AB} \uparrow (A \uparrow \overline{C})(\overline{B} \uparrow C)} = (\overline{A} \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow \overline{C}) \uparrow (\overline{B} \uparrow C)) = \\ &= ((A \uparrow A) \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow (C \uparrow C)) \uparrow ((B \uparrow B) \uparrow C))\end{aligned}$$

Razumije se da rješenje nije jedinstveno, tako da je ovo jedna od mogućih varijanti.

- b) Slično vrijedi za izražavanje preko Pierceove operacije. Prevođenje izraza operaciju po operaciju korištenjem relacija $X = X \downarrow X$, $XY = (X \downarrow X) \downarrow (Y \downarrow Y)$ i $X \vee Y = (X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$ ni ovdje ne vodi ničemu dobrom. Stoga ćemo se ponovo poslužiti pravilom dvojne negacije i De Morganovim teoremama:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \vee \overline{AC} \vee \overline{BC} &= \overline{AB} \vee \overline{AC} \overline{BC} = \overline{AB} \vee (\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C}) = \overline{\overline{AB} \vee (\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C})} = \\ &= \overline{A \vee \overline{B} \vee \overline{A} \vee C \vee B \vee \overline{C}} = (A \downarrow \overline{B}) \vee ((\overline{A} \downarrow C) \downarrow (B \downarrow \overline{C})) = (A \downarrow \overline{B}) \vee ((\overline{A} \downarrow C) \downarrow (B \downarrow \overline{C})) = \\ &= (A \downarrow \overline{B}) \downarrow ((\overline{A} \downarrow C) \downarrow (B \downarrow \overline{C})) = (A \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow (((A \downarrow A) \downarrow C) \downarrow (B \downarrow (C \downarrow C))) = \\ &= ((A \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow (((A \downarrow A) \downarrow C) \downarrow (B \downarrow (C \downarrow C)))) \downarrow (((A \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow (((A \downarrow A) \downarrow C) \downarrow (B \downarrow (C \downarrow C))))\end{aligned}$$

Naravno, i ovo je samo jedna od mogućih varijanti.

Sada ćemo ponoviti isti postupak, ali polazeći od minimiziranih oblika (MDNF i MKNF) polaznog izraza. Nađimo prvo oblik MDNF. Za primjenu Quineovog algoritma, prvo će nam trebati SDNF polaznog izraza:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \vee \overline{AC} \vee \overline{BC} &= \overline{AB} \vee \overline{AC} \overline{BC} = \overline{AB} \vee (\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C}) = \overline{AB} \vee \overline{AB} \vee \overline{A} \overline{C} \vee BC = \\ &= \overline{AB} \vee \overline{A} \overline{C} \vee BC = \overline{AB} (C \vee \overline{C}) \vee \overline{A} \overline{C} (B \vee \overline{B}) \vee BC (A \vee \overline{A}) \\ &= \overline{ABC} \vee \overline{ABC} \vee \overline{ABC} \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C} \vee ABC \vee \overline{ABC} = \overline{ABC} \vee \overline{ABC} \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C} \vee ABC\end{aligned}$$

Pređimo sada na fazu sažimanja. Dobijena SDNF ima svega 4 minterme, pa nema potrebe da ih razvrstavamo po broju negacija. Odmah se vidi da se mogu sažimati prva i druga minterma, zatim prva i četvrta minterma, te konačno druga i treća minterma. S obzirom da su sve minterme učestvovala u sažimanju, polazni izraz je ekvivalentan izrazu

$$\overline{AB} \vee BC \vee \overline{A} \overline{C}$$

Dalja sažimanja nisu moguća, tako da je prva etapa Quineovog algoritma završena. Prelazimo na formiranje tablice prekrivanja:

	\overline{ABC}	$\overline{A} \overline{BC}$	$\overline{A} \overline{B} \overline{C}$	ABC
\overline{AB}	+	+		
BC	+			+
$\overline{A} \overline{C}$		+	+	

Odavde vidimo da su implikante BC i $\overline{A} \overline{C}$ esencijalne, dok se implikanta \overline{AB} može izbaciti, jer ne pokriva niti jednu kolonu tablice koja nije pokrivena esencijalnim implikante. Stoga MDNF polaznog izraza glasi:

$$BC \vee \overline{A} \overline{C}$$

Odavde lako dolazimo do prikaza pomoću Shefferove operacije:

$$BC \vee \overline{A} \overline{C} = \overline{\overline{BC} \overline{\overline{A} \overline{C}}} = \overline{\overline{BC} \overline{A} \overline{C}} = (B \uparrow C) \uparrow ((A \uparrow A) \uparrow (C \uparrow C))$$

Da bismo pronašli MKNF datog izraza, nadimo prvo SDNF negacije polaznog izraza:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{AB} \vee \overline{A} \overline{C} \vee BC} &= \overline{\overline{AB} (\overline{A} \overline{C} \vee BC)} = (\overline{A} \vee \overline{B}) (\overline{A} \overline{C} \vee BC) = \\ &= \overline{A} \overline{C} \vee \overline{A} \overline{B} C \vee A \overline{B} C \vee BC = \overline{A} \overline{C} (B \vee \overline{B}) \vee \overline{A} \overline{B} C \vee A \overline{B} C \vee BC (\overline{A} \vee A) = \\ &= \overline{A} \overline{C} \vee \overline{A} \overline{B} C \vee \overline{A} \overline{B} C \vee A \overline{B} C \vee \overline{A} \overline{B} C \vee A \overline{B} C = \overline{A} \overline{C} \vee \overline{A} \overline{B} C \vee \overline{A} \overline{B} C \vee A \overline{B} C \end{aligned}$$

U dobijenoj SDNF može se sažimati prva sa drugom mintermom, zatim druga sa trećom i, konačno, treća sa četvrtom mintermom. Kako su sve mintermne učestvovala u sažimanju, ovaj izraz je ekvivalentan sa izrazom

$$\overline{A} \overline{C} \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C}$$

Dalja sažimanja nisu moguća i prelazimo na formiranje tablice pokrivanja:

	\overline{ABC}	$\overline{A} \overline{BC}$	$\overline{A} \overline{B} \overline{C}$	$\overline{A} \overline{B} C$
$\overline{A} \overline{C}$	+	+		
$\overline{A} \overline{B} \overline{C}$		+	+	
$\overline{A} \overline{B} C$			+	+

Odavde vidimo da su implikante $\overline{A} \overline{C}$ i $\overline{A} \overline{B} \overline{C}$ esencijalne, dok se implikanta $\overline{A} \overline{B} C$ može izbaciti. Stoga MDNF negacije polaznog izraza glasi:

$$\overline{A} \overline{C} \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C}$$

MKNF polaznog izraza je negacija dobijene MDNF negacije polaznog izraza:

$$\overline{\overline{\overline{A} \overline{C} \vee \overline{A} \overline{B} \overline{C}}} = \overline{\overline{\overline{A} \overline{C}} \overline{\overline{\overline{A} \overline{B} \overline{C}}}} = (\overline{A} \vee C) (B \vee \overline{C})$$

Odavde je samo jedan korak do prikaza pomoću Pierceove funkcije:

$$(\overline{A} \vee C) (B \vee \overline{C}) = \overline{\overline{\overline{\overline{A} \vee C} \overline{\overline{B \vee \overline{C}}}}} = \overline{\overline{\overline{A} \vee C} \vee \overline{\overline{B \vee \overline{C}}}} = ((A \downarrow A) \downarrow C) \downarrow (B \downarrow (C \downarrow C))$$