

Rješenje sa najmanjim brojem promjenljivih dobija se uvođenjem sljedećih oznaka:

- A – Damir je položio matematiku
- B – Damir je položio elektrotehniku
- C – Damir je upisao drugu godinu.

Hipoteza “Damir je položio tačno jedan od dva pomenuta ispita (matematiku ili elektrotehniku)” zapisuje se kao  $A \underline{\vee} B$ . Hipoteza “Damir bi upisao drugu godinu da je položio matematiku” može se zapisati kao  $A \Rightarrow C$ , jer je ona zapravo drugi način da se kaže “Ako je Damir položio matematiku, onda je on upisao drugu godinu” (hipoteza ništa ne govori o tome šta se dešava u slučaju da Damir nije položio matematiku, nego samo kaže šta bi se desilo da jeste položio matematiku). Konačno, hipoteza “Damir nije upisao drugu godinu” se zapisuje kao  $\bar{C}$ . Treba pokazati da vrijedi

$$A \underline{\vee} B, A \Rightarrow C, \bar{C} \vdash B$$

odnosno da je sljedeći izraz tautologija:

$$(A \underline{\vee} B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge \bar{C} \Rightarrow B$$

Zaista, imamo:

$$\begin{aligned} (A \underline{\vee} B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge \bar{C} \Rightarrow B &= (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{A} \vee C)\bar{C} \Rightarrow B = (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{A}\bar{C} \vee C\bar{C}) \Rightarrow B = \\ &= (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{A}\bar{C} \Rightarrow B = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \Rightarrow B = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \Rightarrow B = A \vee \bar{B} \vee C \vee B = T \end{aligned}$$

Alternativno smo mogli postupiti i ovako, mada prebrzo uklanjanje glavne implikacije obično vodi ka komplikovanijem računu:

$$\begin{aligned} (A \underline{\vee} B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge \bar{C} \Rightarrow B &= \overline{(\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{A} \vee C)\bar{C}} \vee B = \overline{\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B} \vee \overline{\bar{A} \vee C} \vee C \vee B = \\ &= \overline{\bar{A}\bar{B}} \vee \overline{\bar{A}B} \vee \overline{\bar{A} \vee C} \vee C \vee B = \overline{\bar{A}\bar{B}} \vee \overline{\bar{A}B} \vee A \vee C \vee B = (\bar{A} \vee B)(A \vee \bar{B}) \vee A \vee C \vee B = \\ &= \bar{A}\bar{B} \vee AB \vee A \vee C \vee B = \bar{A}\bar{B} \vee A \vee C \vee B = A \vee \bar{B} \vee C \vee B = T \end{aligned}$$

Demonstrirajmo još kako bi se mogao metod rezolucije primijeniti da se pokaže da je navedeni izraz tautologija. Za tu svrhu, trebamo pokazati da je njegova negacija

$$(A \underline{\vee} B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge \bar{C} \wedge \bar{B}$$

kontradiktorna. Za primjenu metoda rezolucije, trebamo se prvo osloboditi ekskluzivne disjunktije i implikacije. Međutim, za oslobađanje od ekskluzivne disjunktije nije pogodno koristiti formulu  $X \underline{\vee} Y = X\bar{Y} \vee \bar{X}Y$ , jer na taj način dobijamo činjenicu koja nema oblik elementarne disjunktije. Stoga je mnogo bolje koristiti formulu  $X \underline{\vee} Y = (X \vee Y)(\bar{X} \vee \bar{Y})$ . Time prethodni izraz dobija oblik

$$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge \bar{C} \wedge \bar{B}$$

Ovaj izraz ima oblik konjunkcije činjenica  $X_1 = A \vee B$ ,  $X_2 = \bar{A} \vee \bar{B}$ ,  $X_3 = \bar{A} \vee C$  i  $X_4 = \bar{C}$ , te negacije zaključka  $\bar{B}$ . Potražimo sada kontradikciju metodom rezolucije:

- |     |                        |   |
|-----|------------------------|---|
| (1) | $A \vee B$             | (činjenica $X_1$ )                              |
| (2) | $\bar{A} \vee \bar{B}$ | (činjenica $X_2$ )                              |
| (3) | $\bar{C}$              | (činjenica $X_3$ )                              |
| (4) | $\bar{B}$              | (negacija zaključka)                            |
| (5) | A                      | (rezolucija iz (1) i (4))                       |
| (6) | C                      | (rezolucija iz (2) i (5), zapravo modus ponens) |

Kako su (3) i (6) očito kontradiktorni, to je razmatrani izraz kontradiktoran, odnosno polazni izraz je zaista tautologija. Primijetimo da nam činjenica  $X_2$  uopće nije bila potrebna da izvedemo kontradikciju.

Kao što je na početku rečeno, već se sama postavka zadatka može izvesti na drugačiji način. Recimo, možemo primijetiti da “polagati” i “položiti” nije jedno te isto. Zbog toga bi se mogle uvesti i ovakve oznake:

- A – Damir je polagao matematiku
- B – Damir je polagao elektrotehniku
- C – Damir je položio matematiku
- D – Damir je položio elektrotehniku
- E – Damir je upisao drugu godinu.

Tada bi se traženo rezonovanje moglo zapisati kao

$$A, B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow D, C \vee D, C \Rightarrow E, \bar{E} \not\vdash D$$

odnosno, pored činjenica eksplicitno navedenih u tekstu, potrebne su i skrivene hipoteze  $\bar{A} \Rightarrow \bar{C}$  i  $\bar{B} \Rightarrow \bar{D}$ , koje povezuju pojmove “polagao” i “položio”. Smisao ovih hipoteza je “Ako Damir nije polagao matematiku, onda je nije ni položio” i analogno za elektrotehniku. Alternativno, ove hipoteze mogu se (prema principu kontrapozicije) zapisati i kao  $C \Rightarrow A$  i  $D \Rightarrow B$ , sa smislom “Ako je Damir položio matematiku, onda ju je i polagao” i analogno za elektrotehniku.

Nije teško pokazati da je i ovako zapisano rezonovanje ispravno. Mada ovako zapisano rezonovanje preciznije oslikava šta je u zadatku tačno rečeno, na ovaj način se izvođenje nepotrebno komplicira. Suština je u činjenici da postavka zadatka sadrži isuviše informacija, koje uopće nisu nužne da se izvede korektan zaključak. Naime, za zaključak da je Damir položio elektrotehniku uopće nije bila nužna pretpostavka da je Damir ikako polagao matematiku. Recimo, scenario u kojem je Damir polagao samo elektrotehniku (koju je položio), a na ispit iz matematike nije uopće izlazio zadovoljava sve hipoteze i zaključak, osim hipoteze da je Damir polagao i matematiku i elektrotehniku. Dakle, ta hipoteza sa aspekta provedenog rezonovanja suvišna, odnosno korektan zaključak se može izvesti i bez nje.