

Uvedimo sljedeće logičke promjenljive:

- A – Odigran je derbi
- B – Sabahudin Topalbećirević je sretan
- C – FK Sarajevo je pobijedio
- D – Slave bordo navijači
- E – Slave plavi navijači

Uz ovakve oznake, iskazane pretpostavke mogu se redom iskazati kao  $A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$ ,  $A \Rightarrow (D \vee E)$ ,  $C \Rightarrow D$  i  $A \wedge E$ , dok je zaključak prosto  $\bar{B}$ . Dakle, treba pokazati valjanost rezonovanja

$$A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C), A \Rightarrow (D \vee E), C \Rightarrow D, A \wedge E \vdash \bar{B}$$

Drugim riječima, sljedeći izraz mora biti tautologija:

$$(A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)) \wedge (A \Rightarrow (D \vee E)) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \wedge E) \Rightarrow \bar{B}$$

Pokažimo da je zaista tako:

$$\begin{aligned} & (A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)) \wedge (A \Rightarrow (D \vee E)) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \wedge E) \Rightarrow \bar{B} = \\ & = (\bar{A} \vee BC \vee \bar{B}\bar{C})(\bar{A} \vee DE \vee \bar{D}\bar{E})(\bar{C} \vee D)AE \Rightarrow \bar{B} = \\ & = (A\bar{A} \vee ABC \vee A\bar{B}\bar{C})(\bar{A}E \vee DE\bar{E} \vee \bar{D}E\bar{E})(\bar{C} \vee D) \Rightarrow \bar{B} = \\ & = (ABC \vee A\bar{B}\bar{C})(\bar{A}E \vee \bar{D}E)(\bar{C} \vee D) \Rightarrow \bar{B} = AE(BC \vee \bar{B}\bar{C})(\bar{A} \vee \bar{D})(\bar{C} \vee D) \Rightarrow \bar{B} = \\ & = E(BC \vee \bar{B}\bar{C})(A\bar{A} \vee A\bar{D})(\bar{C} \vee D) \Rightarrow \bar{B} = AE(BC \vee \bar{B}\bar{C})\bar{D}(\bar{C} \vee D) \Rightarrow \bar{B} = \\ & = AE(BC \vee \bar{B}\bar{C})(\bar{C}\bar{D} \vee D\bar{D}) \Rightarrow \bar{B} = AC\bar{D}E(BC \vee \bar{B}\bar{C}) \Rightarrow \bar{B} = ABC\bar{C}\bar{D}E \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E \Rightarrow \bar{B} = \\ & = A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E \Rightarrow \bar{B} = A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E \vee \bar{B} = \bar{A} \vee B \vee C \vee D \vee \bar{E} \vee \bar{B} = T \end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da je razmatrani izraz zaista tautologija. Naravno, ovo nije jedini način da se pokaže tautologičnost ovog izraza. Recimo, moguće je krenuti i ovim putem, koji je korektan ali je komplikovaniji (i velika je šansa da se negdje usput “spetljamo”), jer je potrebno nekoliko puta primijeniti pravilo o neutraliziranju negacije  $X \vee XY = X \vee Y$ :

$$\begin{aligned} & (A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)) \wedge (A \Rightarrow (D \vee E)) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \wedge E) \Rightarrow \bar{B} = \\ & = \overline{(\bar{A} \vee BC \vee \bar{B}\bar{C})(\bar{A} \vee DE \vee \bar{D}\bar{E})(\bar{C} \vee D)AE \vee \bar{B}} = \\ & = \overline{\bar{A} \vee BC \vee \bar{B}\bar{C} \vee \bar{A} \vee DE \vee \bar{D}\bar{E} \vee \bar{C} \vee D \vee \bar{A} \vee E \vee \bar{B}} = \\ & = \overline{ABC\bar{B}\bar{C} \vee ADE\bar{D}\bar{E} \vee \bar{C} \vee D \vee \bar{A} \vee E \vee \bar{B}} = \\ & = \overline{(\bar{A} \vee ABC\bar{B}\bar{C}) \vee (\bar{A} \vee ADE\bar{D}\bar{E}) \vee \bar{C}\bar{D} \vee E \vee \bar{B}} = \\ & = \overline{\bar{A} \vee BC\bar{B}\bar{C} \vee DE\bar{D}\bar{E} \vee \bar{C}\bar{D} \vee E \vee \bar{B}} = \\ & = \overline{\bar{A} \vee (\bar{B} \vee \bar{C})(B \vee C) \vee (\bar{D} \vee E)(D \vee \bar{E}) \vee \bar{C}\bar{D} \vee E \vee \bar{B}} = \\ & = \overline{\bar{A} \vee \bar{B}\bar{C} \vee \bar{B}C \vee \bar{D}\bar{E} \vee DE \vee \bar{C}\bar{D} \vee E \vee \bar{B}} = \\ & = \overline{\bar{A} \vee (\bar{B} \vee \bar{B}C) \vee \bar{B}C \vee (\bar{E} \vee \bar{D}\bar{E}) \vee DE \vee \bar{C}\bar{D}} = \\ & = \overline{\bar{A} \vee (\bar{B} \vee \bar{B}\bar{C}) \vee (\bar{E} \vee DE) \vee \bar{C}\bar{D}} = \overline{\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{E} \vee (D \vee \bar{C}\bar{D})} = \\ & = \overline{\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{E} \vee D \vee C} = T \end{aligned}$$

Kao generalno pravilo, može se zaključiti da uglavnom nije mudro prebrzo se osloboditi glavne implikacije.

S obzirom na veliki značaj principa rezolucije u metodama i primjenama vještačke inteligencije i automatskog rezonovanja pomoću računara, pokažimo još kako se problem može riješiti uz pomoć

principa rezolucije. Za primjenu ovog principa, potrebno je pokazati da je negacija polaznog izraza kontradiktorna, odnosno da je kontradiktoran izraz

$$(A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)) \wedge (A \Rightarrow (D \vee E)) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \wedge E) \wedge B$$

Ovaj izraz baš i nije pogodan za testiranje metodom rezolucije, jer hipoteze koje se u njemu javljaju imaju “nezgodan” oblik. Stoga prvo svedimo ovaj izraz da ove “nezgodne” hipoteze dobiju oblik u kojem se javljaju elementarne disjunkcije. Oslobodimo li se implikacija, ekvivalencije i ekskluzivne disjunkcije, ovaj izraz dobija oblik

$$(\bar{A} \vee \bar{B} \bar{C} \vee BC) \wedge (\bar{A} \vee \bar{D} \bar{E} \vee \bar{D} E) \wedge (\bar{C} \vee D) \wedge A \wedge E \wedge B$$

Dalje, možemo pisati:

$$\begin{aligned} \bar{A} \vee \bar{B} \bar{C} \vee BC &= \bar{A} \vee (\bar{B} \vee BC)(\bar{C} \vee BC) = \bar{A} \vee (\bar{B} \vee C)(B \vee \bar{C}) = (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C)(\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \\ \bar{A} \vee \bar{D} \bar{E} \vee \bar{D} E &= \bar{A} \vee (D \vee \bar{D} E)(\bar{E} \vee \bar{D} E) = \bar{A} \vee (D \vee E)(\bar{D} \vee \bar{E}) = (\bar{A} \vee D \vee E)(\bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{E}) \end{aligned}$$

Stoga se dati izraz može zapisati u obliku

$$(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee D \vee E) \wedge (\bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{E}) \wedge (\bar{C} \vee D) \wedge A \wedge E \wedge B$$

koji ima oblik konjunkcije činjenica  $X_1 = \bar{A} \vee \bar{B} \vee C$ ,  $X_2 = \bar{A} \vee B \vee \bar{C}$ ,  $X_3 = \bar{A} \vee D \vee E$ ,  $X_4 = \bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{E}$ ,  $X_5 = \bar{C} \vee D$ ,  $X_6 = A$ ,  $X_7 = E$  i negacije zaključka  $\bar{Y} = B$ , koje sve imaju oblik elementarnih disjunkcija. Sad možemo primijeniti metod rezolucije:

(1)	$\bar{A} \vee \bar{B} \vee C$	(činjenica $X_1$ )
(2)	$\bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{E}$	(činjenica $X_4$ )
(3)	$\bar{C} \vee D$	(činjenica $X_5$ )
(4)	$A$	(činjenica $X_6$ )
(5)	$E$	(činjenica $X_7$ )
(6)	$B$	(negacija zaključka)
(7)	$\bar{B} \vee C$	(rezolucija iz (1) i (4), zapravo modus ponens)
(8)	$\bar{D} \vee \bar{E}$	(rezolucija iz (2) i (4), također modus ponens)
(9)	$\bar{C}$	(rezolucija iz (6) i (7), također modus ponens)
(10)	$\bar{D}$	(rezolucija iz (5) i (8))
(11)	$\bar{C}$	(rezolucija iz (3) i (10))

Kako su (9) i (11) kontradiktorni, razmatrani izraz je kontradiktoran, odnosno polazni izraz je tautologija, što je i trebalo pokazati. Primijetimo da nam za izvođenje kontradikcije uopće nisu bile potrebne činjenice  $X_2$  i  $X_3$ . To zapravo znači da se traženi zaključak mogao izvesti i uz manju količinu pretpostavki odnosno uz slabije pretpostavke nego što je postavljeno u zadatku. Na primjer, umjesto pretpostavke da je Sabahudin Topalbećirević sretan ako i samo ako je pobijedio FK Sarajevo, dovoljno je bilo pretpostaviti da je Sabahudin Topalbećirevoć sretan samo ako je pobijedio FK Sarajevo. Takva oslabljena formulacija dopušta da Sabahudin Topalbećirević ne bude sretan čak i ako je pobijedio FK Sarajevo, ali ako pobijedi on će biti sigurno sretan (formalno, uz takvu oslabljenu formulaciju, ekvivalencija  $B \Leftrightarrow C$  će biti zamijenjena implikacijom  $C \Rightarrow B$ ). Međutim, rezonovanje ostaje na snazi i uz ovakvu oslabljenu pretpostavku.

Na kraju recimo još i ovo. Mnogi će prilikom rješavanja ovog zadatka propustiti da uvedu promjenljivu  $A$  koja izražava činjenicu da je derbi odigran, nego će implicitno pretpostaviti da derbi jeste odigran. Mada se ispravnost rezonovanja može pokazati i iz takvog modela (odnosno, formirani izraz će i dalje biti tautologija), to je ipak greška u modelu, jer logički izraz koji modelira postavljeni problem mora uzeti u obzir sve varijable koje opisuju događaje koji se mogu, ali ne moraju desiti. Zaista, moglo se desiti da derbi uopće nije odigran.