

Ovaj se zadatak može riješiti na više načina. Pokazaćemo razne načine, kao ilustraciju kako pogodan izbor promjenljivih može olakšati ili otežati rješavanje. Najjednostavnije rješenje dobijamo uz upotrebu svega 3 promjenljive. Naime, uvešćemo sljedeće oznake:

- A – Gospodina Petrovića je ubila kućna pomoćnica
- B – Gospodina Petrovića je ubio baštovan
- C – Alarm se aktivirao

Hipoteza “Gospodina Petrovića je ubila ili njegova kućna pomoćnica ili njegov baštovan (ali ne oboje skupa)” zapisuje se kao  $A \vee B$ . Hipoteza “Ulazak baštovana u kuću bi aktivirao alarm” možemo (bez uvođenja novih varijabli) zapisati kao  $B \Rightarrow C$ , jer ako je gospodina Petrovića ubio baštovan, on je morao ući u kuću (gospodin Petrović je ubijen u kući), tako da je hipoteza ekvivalentna hipotezi “Ako je baštovan ubio gospodina Petrovića, alarm bi se aktivirao”. Hipoteza “Alarm se nije aktivirao” je naravno  $\bar{C}$ . Treba pokazati da vrijedi

$$A \vee B, B \Rightarrow C, \bar{C} \vdash A$$

odnosno da je sljedeći izraz tautologija:

$$(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge \bar{C} \Rightarrow A$$

Zaista, imamo:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge \bar{C} \Rightarrow A &= (A\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{B} \vee C)\bar{C} \Rightarrow A = (A\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{B}\bar{C} \vee C\bar{C}) \Rightarrow A = \\ &= (A\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{B}\bar{C} \Rightarrow A = A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \Rightarrow A = A\bar{B}\bar{C} \Rightarrow A = \bar{A} \vee B \vee C \vee A = T \end{aligned}$$

Alternativno smo mogli postupiti i ovako, mada prebrzo uklanjanje glavne implikacije obično vodi ka komplikovanijem računu:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge \bar{C} \Rightarrow A &= \overline{(A\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{B} \vee C)\bar{C}} \vee A = \overline{A\bar{B} \vee \bar{A}B} \vee \overline{\bar{B} \vee C} \vee C \vee A = \\ &= \overline{A\bar{B}} \vee \overline{\bar{A}B} \vee \overline{\bar{B} \vee C} \vee C \vee A = \overline{A\bar{B}} \vee \overline{\bar{A}B} \vee B \vee C \vee A = (\bar{A} \vee B)(A \vee \bar{B}) \vee B \vee C \vee A = \\ &= \bar{A}\bar{B} \vee AB \vee B \vee C \vee A = \bar{A}\bar{B} \vee B \vee C \vee A = \bar{A} \vee B \vee C \vee A = T \end{aligned}$$

Demonstrirajmo još kako bi se mogao metod rezolucije primijeniti da se pokaže da je navedeni izraz tautologija. Za tu svrhu, trebamo pokazati da je njegova negacija

$$(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge \bar{C} \wedge \bar{A}$$

kontradiktorna. Za primjenu metoda rezolucije, trebamo se prvo osloboditi ekskluzivne disjunkcije i implikacije. Međutim, za oslobađanje od ekskluzivne disjunkcije nije pogodno koristiti formulu  $X \underline{\vee} Y = X\bar{Y} \vee \bar{X}Y$ , jer na taj način dobijamo činjenicu koja nema oblik elementarne disjunkcije. Stoga je mnogo bolje koristiti formulu  $X \underline{\vee} Y = (X \vee Y)(\bar{X} \vee \bar{Y})$ . Time prethodni izraz dobija oblik

$$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge (\bar{B} \vee C) \wedge \bar{C} \wedge \bar{A}$$

Ovaj izraz ima oblik konjunkcije činjenica  $X_1 = A \vee B$ ,  $X_2 = \bar{A} \vee \bar{B}$ ,  $X_3 = \bar{B} \vee C$  i  $X_4 = \bar{C}$ , te negacije zaključka  $\bar{A}$ . Potražimo sada kontradikciju metodom rezolucije:

- |     |                  |   |
|-----|------------------|---|
| (1) | $A \vee B$       | (činjenica $X_1$ )                              |
| (2) | $\bar{B} \vee C$ | (činjenica $X_3$ )                              |
| (3) | $\bar{C}$        | (činjenica $X_4$ )                              |
| (4) | $\bar{A}$        | (negacija zaključka)                            |
| (5) | $B$              | (rezolucija iz (1) i (4))                       |
| (6) | $C$              | (rezolucija iz (2) i (5), zapravo modus ponens) |

Kako su (3) i (6) očito kontradiktorni, to je razmatrani izraz kontradiktoran, odnosno polazni izraz je zaista tautologija. Primijetimo da nam činjenica  $X_2$  uopće nije bila potrebna da izvedemo kontradikciju.

Kao što je na početku rečeno, već se sama postavka zadatka može izvesti na drugačiji način. Recimo, moguće je formirati i druge ispravne postavke, sa više od 3 promjenljive. Međutim, moguće da tada budu potrebne i nove (skriveno) hipoteze, koje nisu eksplicitno navedene u tekstu. Na primjer, pretpostavimo da smo uveli ovakve oznake:

- A – Gospodina Petrovića je ubila kućna pomoćnica
- B – Gospodina Petrovića je ubio baštovan
- C – Baštovan je ušao u kuću
- D – Alarm se aktivirao

Tada bi se traženo rezonovanje moglo zapisati kao

$$A \vee B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow D, \bar{D} \not\vdash A$$

odnosno, potrebna je skrivena hipoteza  $B \Rightarrow C$  koju čitamo kao “Ako je gospodina Petrovića ubio baštovan, baštovan je ušao u kuću”. Ovo je jasno, s obzirom da je poznato da je gospodin Petrović ubijen u kući. Međutim, ovakva hipoteza nije eksplicitno prisutna u tekstu.

Pokažimo da je ovakvo rezonovanje ispravno odnosno da je izraz

$$(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge \bar{D} \Rightarrow A$$

tautologija:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge \bar{D} \Rightarrow A &= (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{B} \vee C)(\bar{C} \vee D)\bar{D} \Rightarrow A = \\ &= (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{B} \vee C)(\bar{C}\bar{D} \vee D\bar{D}) \Rightarrow A = (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{B} \vee C)\bar{C}\bar{D} \Rightarrow A = \\ &= (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee C\bar{C}\bar{D}) \Rightarrow A = (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{B}\bar{C}\bar{D} \Rightarrow A = \\ &= (\bar{A}\bar{B}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee \bar{A}B\bar{B}\bar{C}\bar{D}) \Rightarrow A = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \Rightarrow A = \bar{A} \vee B \vee C \vee D \vee A = T \end{aligned}$$

Alternativno, možemo postupiti i ovako:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge \bar{D} \Rightarrow A &= \overline{(\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{B} \vee C)(\bar{C} \vee D)\bar{D}} \vee A = \\ &= \overline{\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B} \vee \overline{\bar{B} \vee C} \vee \overline{\bar{C} \vee D} \vee D \vee A = \overline{\bar{A}\bar{B}} \vee \overline{\bar{A}B} \vee \overline{B\bar{C}} \vee \overline{C\bar{D}} \vee D \vee A = \\ &= \overline{\bar{A}\bar{B}} \vee \overline{\bar{A}B} \vee \overline{B\bar{C}} \vee \overline{C\bar{D}} \vee D \vee A = (\bar{A} \vee B)(\bar{A} \vee \bar{B}) \vee B \vee C \vee D \vee A = \\ &= \bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B \vee B \vee C \vee D \vee A = \bar{A}\bar{B} \vee B \vee C \vee A = \bar{A} \vee B \vee C \vee D \vee A = T \end{aligned}$$

Nije teško primijeniti ni metod rezolucije, na potpuno analogan način kao u prvoj verziji postavke zadatka. Međutim, ključno je da se bez skrivene hipoteze  $B \Rightarrow C$  ne može pokazati ispravnost rezonovanja. Zaista, kada bismo izostavili tu hipotezu, imali bismo

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge \bar{D} \Rightarrow A &= (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{C} \vee D)\bar{D} \Rightarrow A = \\ &= (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)(\bar{C}\bar{D} \vee D\bar{D}) \Rightarrow A = (\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{C}\bar{D} \Rightarrow A = \overline{(\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)\bar{C}\bar{D}} \vee A = \\ &= \overline{\bar{A}\bar{B}} \vee \overline{\bar{A}B} \vee C \vee D \vee A = \overline{\bar{A}\bar{B}} \vee \overline{\bar{A}B} \vee C \vee D \vee A = (\bar{A} \vee B)(\bar{A} \vee \bar{B}) \vee C \vee D \vee A = \\ &= \bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B \vee C \vee D \vee A = A \vee \bar{A}\bar{B} \vee C \vee D = A \vee \bar{B} \vee C \vee D \end{aligned}$$

Dakle, ne možemo izvesti tautologiju. Primijetimo da iz konjunkcije samo činjenica  $A \vee B, C \Rightarrow D$  i  $\bar{D}$  nakon sređivanja dobijamo  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee \bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ . Dakle, u svakom slučaju slijedi da baštovan nije ušao u kuću, ali su i dalje otvorene opcije da je gospodina Petrovića ubila bilo kućna pomoćnica, bilo baštovan. Drugim riječima, nedostaje informacija koja bi oslobodila baštovana od odgovornosti.