

Uvedimo logičke promjenljive sa sljedećim značenjem:

A – Beba je mirna  
 B – Beba je nervozna  
 C – Bebi rastu zubići

Hipoteza “Ako je beba mirna, onda nije nervozna” može se zapisati kao  $A \Rightarrow \bar{B}$ . Hipoteza “Beba je nervozna ako joj rastu zubići” može se zapisati kao  $C \Rightarrow B$ . Konačno, hipoteza “Bebi rastu zubići” je prosto C, dok se zaključak “Beba nije mirna” može zapisati kao  $\bar{A}$ . Slijedi da se navedeno rezonovanje može prikazati kao:

$$A \Rightarrow \bar{B}, C \Rightarrow B, C \vdash \bar{A}$$

Ovo rezonovanje je ispravno ako je sljedeći izraz tautologija:

$$(A \Rightarrow \bar{B})(C \Rightarrow B)C \Rightarrow \bar{A}$$

Pokažimo pomoću elementarnih transformacija da je ovo zaista tautologija:

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow \bar{B})(C \Rightarrow B)C \Rightarrow \bar{A} &= (\bar{A} \vee \bar{B})(\bar{C} \vee B)C \Rightarrow \bar{A} = (\bar{A} \vee \bar{B})(C\bar{C} \vee BC) \Rightarrow \bar{A} = \\ &= (\bar{A} \vee \bar{B})BC \Rightarrow \bar{A} = \bar{A}BC \vee \bar{B}BC \Rightarrow \bar{A} = \bar{A}BC \Rightarrow \bar{A} = \overline{\bar{A}BC} \vee \bar{A} = \\ &= A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{A} = \bar{B} \vee \bar{C} \vee (A \vee \bar{A}) = \bar{B} \vee \bar{C} \vee T = T \end{aligned}$$

Ovim smo pokazali ispravnost rezonovanja. Naravno, ovo nije jedini put da se pokaže tautologija. Recimo, mogli smo se prvo osloboditi glavne implikacije:

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow \bar{B})(C \Rightarrow B)C \Rightarrow \bar{A} &= \overline{(A \Rightarrow \bar{B})(C \Rightarrow B)C} \vee \bar{A} = \overline{A \Rightarrow \bar{B}} \vee \overline{C \Rightarrow B} \vee \bar{C} \vee \bar{A} = \\ &= \overline{\bar{A} \vee \bar{B}} \vee \overline{\bar{C} \vee B} \vee \bar{C} \vee \bar{A} = AB \vee \bar{B}C \vee \bar{C} \vee \bar{A} = (\bar{A} \vee AB) \vee (\bar{C} \vee \bar{B}C) = \\ &= \bar{A} \vee B \vee \bar{C} \vee \bar{B} = \bar{A} \vee \bar{C} \vee (B \vee \bar{B}) = \bar{A} \vee \bar{C} \vee T = T \end{aligned}$$

Ovdje smo se dva puta poslužili pravilom o neutraliziranju negacije  $X \vee \bar{X}Y = X \vee Y$ . Praksa međutim pokazuje da je bolje ne oslobađati se glavne implikacije do samog kraja, jer se u suprotnom postupak obično više zakomplikira.

Pokažimo još kako bismo tautologičnost razmatranog izraza mogli pokazati metodom rezolucije. Razmatrani izraz ima oblik

$$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \Rightarrow Y$$

gdje činjenice  $X_1 - X_3$  i zaključak Y redom glase

$$X_1 = A \Rightarrow \bar{B}, \quad X_2 = C \Rightarrow B, \quad X_3 = C, \quad Y = \bar{A}$$

Ovaj izraz je tautologija samo ako je njegova negacija kontradiktorna, tj. ako je kontradiktoran izraz

$$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \bar{Y}$$

odnosno izraz

$$(A \Rightarrow \bar{B}) \wedge (C \Rightarrow B) \wedge C \wedge A$$

Nakon oslobađanja od implikacija, činjenice  $X_1$  i  $X_2$  mogu se predstaviti u obliku

$$X_1 = \overline{A} \vee \overline{B}, \quad X_2 = \overline{C} \vee B$$

Sada možemo primijeniti metod rezolucije:

- |     |                                  |   |
|-----|----------------------------------|---|
| (1) | $\overline{A} \vee \overline{B}$ | (činjenica $X_1$ )                              |
| (2) | $\overline{C} \vee B$            | (činjenica $X_2$ )                              |
| (3) | $C$                              | (činjenica $X_3$ )                              |
| (4) | $A$                              | (negacija zaključka)                            |
| (5) | $\overline{B}$                   | (rezolucija iz (2) i (3), zapravo modus ponens) |
| (6) | $\overline{B}$                   | (rezolucija iz (4) i (1), također modus ponens) |

Kako su (5) i (6) očito kontradiktorni, to je polazni skup činjenica kontradiktoran, odnosno kontradiktoran je izraz

$$(A \Rightarrow \overline{B}) \wedge (C \Rightarrow B) \wedge C \wedge A$$

To znači da je izraz

$$(A \Rightarrow \overline{B})(C \Rightarrow B)C \Rightarrow \overline{A}$$

tautologija, što je i trebalo pokazati.

Kontradikciju smo metodom rezolucije mogli i ovako izvesti:

- |     |                                  |   |
|-----|----------------------------------|---|
| (1) | $\overline{A} \vee \overline{B}$ | (činjenica $X_1$ )                              |
| (2) | $\overline{C} \vee B$            | (činjenica $X_2$ )                              |
| (3) | $C$                              | (činjenica $X_3$ )                              |
| (4) | $A$                              | (negacija zaključka)                            |
| (5) | $\overline{A} \vee \overline{C}$ | (rezolucija iz (1) i (2))                       |
| (6) | $\overline{C}$                   | (rezolucija iz (4) i (1), zapravo modus ponens) |

Ovdje kontradikciju formiraju (3) i (6). Uglavnom, dolazimo do istih zaključaka.

Pokažimo na kraju kako u ovom jednostavnom primjeru možemo izvesti zaključak čistim korištenjem klasičnih pravila rezonovanja na osnovu poznatih činjenica:

- Iz činjenica  $C$  i  $C \Rightarrow B$  na osnovu pravila modus ponens slijedi zaključak  $B$ ;
- Iz činjenice  $A \Rightarrow B$  i dobijenog zaključka  $B$  na osnovu pravila modus tolens slijedi konačan zaključak  $A$ ;

Dakle, sasvim smo lako izveli traženi zaključak na osnovu poznatih činjenica. Međutim, slično rezonovanje nije nimalo lako provesti u slučaju da su činjenice kompleksnije i ukoliko je skup činjenica bogatiji.