

Uvedimo nekoliko varijabli koje modeliraju elemente iz postavke zadatka:

- A – Predstava je dobra
- B – Tekst je loš
- C – Režiser je dobar
- D – Glumci su dobri

Hipoteza “Ako je predstava dobra, onda nije loš tekst, ili su dobri režiser i glumci” može se zapisati kao:

$$A \Rightarrow \bar{B} \vee CD$$

Zbog toga se tvrdnja da iz svih postavljenih hipoteza slijedi da tekst nije loš ili da je režiser dobar, može predstaviti u obliku

$$A \Rightarrow \bar{B} \vee CD, A, D \vdash \bar{B} \vee C$$

što zapravo znači da je sljedeći izraz tautologija:

$$(A \Rightarrow \bar{B} \vee CD) \wedge A \wedge D \Rightarrow \bar{B} \vee C$$

Tautologičnost ovog izraza pokazaćemo na dva načina. Na prvi način, koristićemo čisto algebarske manipulacije:

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow \bar{B} \vee CD) \wedge A \wedge D \Rightarrow \bar{B} \vee C &= (\bar{A} \vee \bar{B} \vee CD)AD \Rightarrow \bar{B} \vee C = \\ &= \overline{A\bar{B}D} \vee \overline{ACD} \Rightarrow \bar{B} \vee C = AD(\bar{B} \vee C) \Rightarrow \bar{B} \vee C = \overline{AD(\bar{B} \vee C)} \vee \bar{B} \vee C = \\ &= \bar{A} \vee \bar{D} \vee \overline{\bar{B} \vee C} \vee \bar{B} \vee C = \bar{A} \vee \bar{D} \vee \overline{BC} \vee \bar{B} \vee C = \bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee C = T \end{aligned}$$

Alternativno, mogli smo postupiti i ovako, mada iskustvo pokazuje da je bolje ne oslobađati se glavne implikacije sve do samog kraja, jer ćemo u suprotnom morati na više mjesta koristiti pravilo o neutraliziranju negacije  $X \vee \bar{X}Y = X \vee Y$ :

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow \bar{B} \vee CD) \wedge A \wedge D \Rightarrow \bar{B} \vee C &= \overline{(A \Rightarrow \bar{B} \vee CD) \wedge A \wedge D} \vee \bar{B} \vee C = \\ &= \overline{A \Rightarrow \bar{B} \vee CD} \vee \bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{B} \vee C = \overline{\bar{A} \vee \bar{B} \vee CD} \vee \bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{B} \vee C = \\ &= \overline{AB\bar{C}D} \vee \bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{B} \vee C = \overline{AB(\bar{C} \vee \bar{D})} \vee \bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{B} \vee C = \\ &= \overline{AB\bar{C}} \vee \overline{AB\bar{D}} \vee \bar{A} \vee \bar{D} \vee \bar{B} \vee C = (\bar{A} \vee \overline{AB\bar{C}}) \vee (\overline{AB\bar{D}} \vee \bar{D}) \vee \bar{B} \vee C = \\ &= \bar{A} \vee \overline{BC} \vee \bar{D} \vee \bar{B} \vee C = \bar{A} \vee (\bar{B} \vee \overline{BC}) \vee \bar{D} \vee C = \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D} \vee C = T \end{aligned}$$

Vidimo da smo na oba načina uspjeli dobiti da je izraz tautologija, bez većih poteškoća. Primijenimo sada metod rezolucije, koji obično dovodi mnogo brže do rješenja u slučaju kompleksnijih izraza. Izraz čiju tautologičnost želimo dokazati u ovom primjeru ima oblik

$$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \Rightarrow Y$$

gdje činjenice  $X_1 - X_3$  redom glase

$$X_1 = A \Rightarrow \bar{B} \vee CD, \quad X_2 = A, \quad X_3 = D$$

dok zaključak Y ima oblik

$$Y = \bar{B} \vee C$$

Ovaj izraz je tautologija samo ako je njegova negacija kontradiktorna, tj. ako je kontradiktoran izraz

$$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \bar{Y}$$

odnosno izraz

$$(A \Rightarrow \bar{B} \vee CD) \wedge A \wedge D \wedge B\bar{C}$$

Za primjenu metoda rezolucije trebalo bi se osloboditi svih implikacija iz činjenica (zapravo, poželjno bi bilo da sve činjenice budu elementarne konjunkcije ili barem konjunktivne normalne forme). U ovom primjeru, samo činjenica  $X_1$  ima nepogodan oblik. Međutim, ona se lako transformira u oblik

$$X_1 = \bar{A} \vee \bar{B} \vee CD$$

Sada možemo primijeniti metod rezolucije:

- |     |                                |   |
|-----|--------------------------------|---|
| (1) | $\bar{A} \vee \bar{B} \vee CD$ | (činjenica $X_1$ )                              |
| (2) | $A$                            | (činjenica $X_2$ )                              |
| (3) | $D$                            | (činjenica $X_3$ )                              |
| (4) | $B\bar{C}$                     | (negacija zaključka)                            |
| (5) | $\bar{B} \vee CD$              | (rezolucija iz (1) i (2), zapravo modus ponens) |
| (6) | $B$                            | (logička posljedica (4))                        |
| (7) | $CD$                           | (rezolucija iz (5) i (6))                       |
| (8) | $C$                            | (logička posljedica (7))                        |
| (9) | $\bar{C}$                      | (logička posljedica (4))                        |

Kako su (8) i (9) očito kontradiktorni, to je polazni skup činjenica kontradiktoran, odnosno kontradiktoran je izraz

$$(\bar{A} \vee \bar{B} \vee CD) \wedge A \wedge D \wedge B\bar{C}$$

To znači da je izraz

$$(A \Rightarrow \bar{B} \vee CD) \wedge A \wedge D \Rightarrow B \vee \bar{C}$$

tautologija, što je i trebalo pokazati.